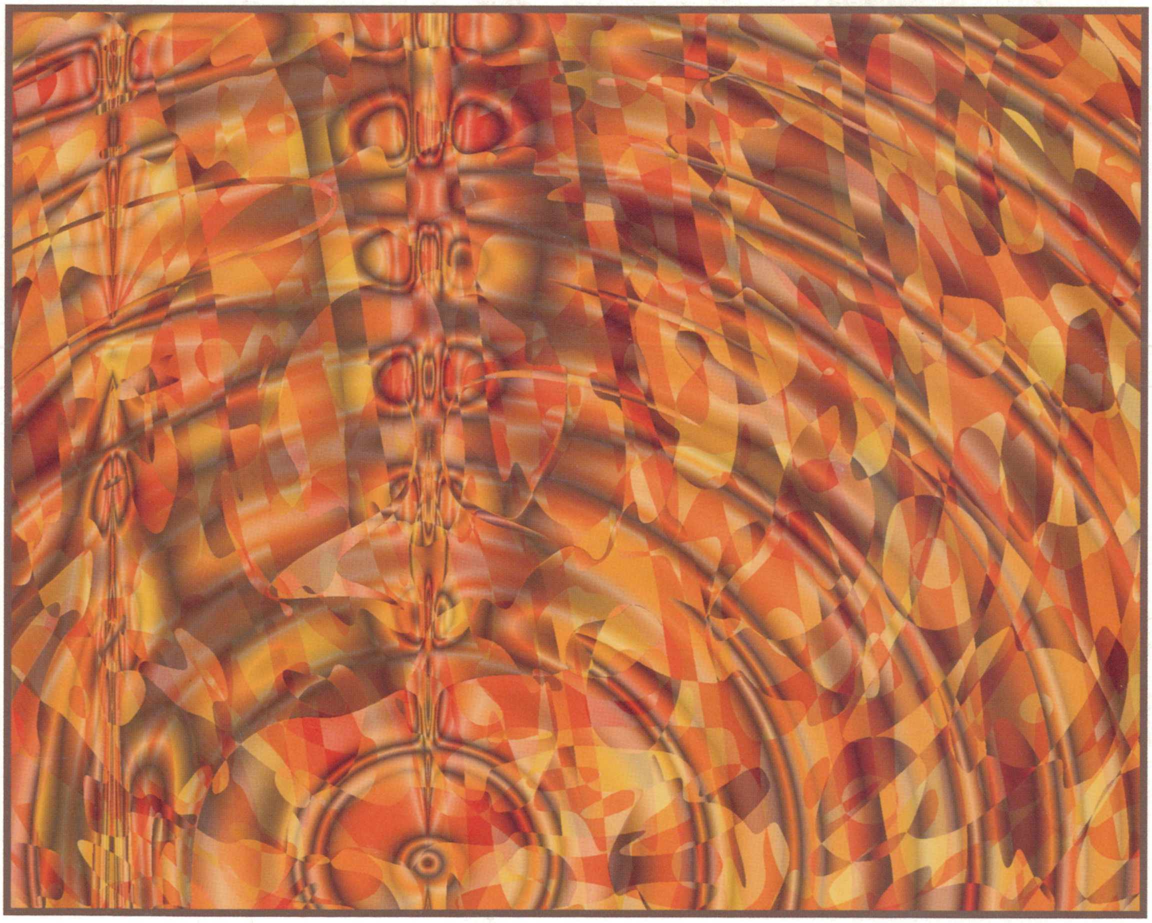
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2009年8月1日発行　第47巻8号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

数理科学

8
2009

特集 複素数
その奥深い魅力と広がり



No.554

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 554 August 2009

複素数

その奥深い魅力と広がり

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は１年間（本誌のみ）11,000 円，１年間（本誌＋別冊２冊）14,500 円，半年間（本誌のみ）5,500 円，半年間（本誌＋別冊１冊）7,250 円です．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63 年/7～2006 年/8 省略
2006 年/9　ランダムネス
/10　ツイスター理論の拡がり
別冊　場の量子論の拡がり
/11　固有値問題のひろがり
/12　素粒子像の探究
2007 年/1　ヤング図形で遊ぶ物理と数学
/2　ランダム行列の広がり
/3　現代物理における超対称性
/4　現代数学はいかに使われているか［代数編］
別冊　双対性の世界
/5　数学の直観的理解
/6　物理における位相の世界
/7　代数的物理観
/8　数学における場の量子論
/9　ディラック
/10　フーリエ解析の力
別冊　素粒子物理学の発展
/11〈電弱統一理論〉
/12「時空」への問いかけ
2008 年/1　現象を視る
/2　ゲージ重力対応
/3　現代物理のための数学キーワード
/4　現代数学はいかに使われているか［解析編］
別冊　多様体の広がり
/5　物理と数学の難所
/6　線形代数の力
/7　物理的思考法のすすめ
/8　数の魅力
/9　トポロジカルな弦の世界
/10　ポアンカレ
別冊　対称性と保存則
/11　物理と論理
/12　確率論的物理観
2009 年/1　グラフィックでわかる物理
/2　発展する量子力学
/3　方程式に潜む対称性
/4　現代数学はいかに使われているか［幾何編］
別冊　代数学の魅力
/5　微積分を楽しむ
/6　現象と物理概念を結ぶ方程式
/7　現代物理の世界像

数理科学臨時別冊一覧

07 年/11　コンピュータ将棋の頭脳
07 年/12　計算神経科学への招待
08 年/1　演習 くり込み群
08 年/3　熱方程式で学ぶ逆問題
08 年/5　重力理論講義
08 年/6　代数幾何入門講義
08 年/7　ネットワーク科学への招待
08 年/9　物理のためのリー群とリー代数
08 年/11　量子暗号理論の展開
09 年/1　量子力学の考え方
09 年/7　ゲージ理論の発展

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店本店（八王子）
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
書泉ブックタワー（秋葉原）
三省堂本店（神田）
ブックファースト渋谷店
リブロ池袋店
ジュンク堂書店（池袋）
ジュンク堂書店（新宿）
芳林堂（高田馬場）
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
ブックファースト青葉台店（横浜）
栄松堂ジョイナス店（横浜）
有隣堂イセザキ町店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
文教堂ブックセンター（川崎）
旭屋船橋店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
旭屋本店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂書店（京都）
ジュンク堂書店（神戸）
ジュンク堂三宮駅前店（神戸）
ジュンク堂書店（大分）
喜久屋書店倉敷店
紀伊國屋書店松山店
紀伊國屋書店福岡店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
紀伊國屋書店新潟店
旭屋札幌店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂書店（仙台）
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

――大学生協・売店――

東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
電気通信大学・福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店

August 2009 MATHEMATICAL SCIENCES Number 554

特集／複素数

巻頭言

野口 潤次郎

虚数 i は，$i^2=-1$ をみたす仮想の数として，今は高校2年生で習う．そして，2つの実数 $x,y\in\mathbf{R}$ を用いて $z=x+iy$ と表されるものが複素数と呼ばれる数である．i を有効に用いた初めはカルダノ（1501～1576）による3次方程式の解法であろう．しかしこれを関数の変数の中に取り入れ，数学的にきちんとした対象として扱ったのはオイラー(1709～1783) である．我が国で言えば，享保の将軍吉宗の時代である．近所のお寺の墓石をみても享保と刻んであるものがないではないが，さすがに少ない．複素数，指数関数，三角関数の関係式で

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

はオイラーの公式としてよく知られている．それまで無関係に習ってきたものの間にこのような単純な美しい式が成り立つことは驚きである．高校生から大人までこのオイラーの公式にシビレル人は，けっこういるのである．しかしながら，虚数を含む複素数が，"数" として認知されるには，まだ多くの紆余曲折を経なければならないのであった．

ガウス（1777～1855）は，複素数 $z=x+iy$ を平面座標空間の点 $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ と対応させる幾何学的解釈を与えた．複素数の全体 $\mathbf{C}$ を平面と見たものをガウス平面と呼ぶ．ガウスの名が冠されているからと言って，この観点が一人ガウスによるものではないことは，歴史の多くの事柄と同様である．とまれ，これが複素数の幾何学的解釈を与え，後年のポアンカレによる双曲的幾何学の実現に繋がる．しかし，この時点でより大きな成果は，**代数学の基本定理**を得たことであると思う．任意の複素数を係数とする代数方程式

$$P(z)=\sum_{j=0}^{n}c_jz^{n-j}=0$$

は，必ず複素数の中で根を持つことが示された(1799～)．実際ガウスは，証明を3回与えているそうである．"～" は，その意味である．ある数の体系が与えられ，その体系の数を係数とする代数方程式を立てるとき，解をその体系の中に求めることは，自然な行いである．1次方程式をもとにすれば，自然数から整数が生まれ，有理数ができる．さらに $x^2=2, x^3=2$ 等から無理数を含む実数ができる．ここには，実は極限操作が入ってくることに注意したい．そして，初めに述べたカルダノのように，その根が初めの体系になければ，それを加えて数の体系を大きくするという，代数方程式についてのこの操作は，複素数で極まるのである．その意味で，複素数の体系は完全である．その頃の日本では，松平定信が財政改革に腐心し，美術では北斎，広重，文学では馬琴，学問では宣長が古事記伝を完成し，篤胤へと移る時代である．また，隠居した伊能忠敬が地球の大きさを知りた

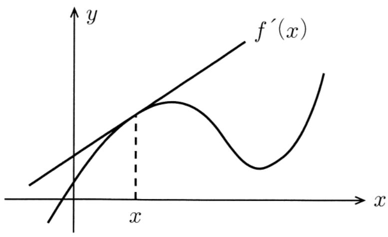


図 1　接線の図.

いと発念し測量を行い地球の直径を求めたことも特記されるべきであろう．この東西文化活動に共通に見られる本質は，己が良し（面白い）とすることを極める「価値観」と「行い」である．この様な歴史比較をするのに，よくあるのはその頃の日本での数学の状況と比較し，我が国での到達点の低かったことを嘆ずることである．これは，一見もっともなことのように見えるが，その実あまり本質を突いていないことに気づく．それは，食文化を比較するのにヨーロッパの小麦を使った食料（例えば，パン）と日本での小麦を使った食料（例えば，うどん）を比較するようなものである．ならば，日本の何を比較すべきは，明らかである．価値観と行いが大事であり，その現れ方は文明により異なったものになるのは，当然なのである．

さて一方で実数体系に基づく微積分学（解析学）はニュートン（1642～1727），ライプニッツ（1646～1716）に始まりラグランジュ（1736～1813），フーリエ（1768～1830）等々と発展していた．実変数の実関数 $y = f(x)$ の微係数 $f'(x)$ とは，そのグラフの接線の傾きを表す（図 1）．

複素変数 z の複素数値関数 $w = f(z)$ の微分 $f'(z)$ は，z, w がガウス平面の点とみるとき，4 次元空間で考えることになり，視覚的にはそう明らかではない．複素数値関数を複素数で積分するとなると更に不明である．これらは，コーシー（1789～1857）により**コーシーの積分定理**として集約されることになる．すなわち，ある曲線 C に関する線積分 $\int_C f(z)dz$ が定義され，C が閉曲線で C およびその内側を含む場所（領域上）で正則関数 $f(z)$ が定義されているならば，

$$\int_C f(z)dz = 0$$

となる．実際コーシー自身初めは，関数 $w = f(z)$ は $z = x + iy, w = u + iv$ とおいたとき連立方程式 $u = u(x, y), v = v(x, y)$ で与えられるもので，虚数 i はあくまで形式的な表現を与えるものと捉えていた．$f'(z)$ も連続性を仮定していたそうである．微分 $f'(z)$ は，存在するだけで十分であるとの厳密な証明は，グールザ（E. Goursat, *Acta Math.* **4** (1884)）による．複素数に基づく微分・積分ができたことにより，複素数の世界は，飛躍的に発展する．

現在，偏微分方程式，特に楕円型偏微分方程式論は実解析学の一大分野として大いに発展したが，それによっても複素関数 $f(z)$ が $f'(z)$ の存在のみを仮定してその解析性を示すのに，コーシー（＋グールザ）の積分定理を経ない証明はない．ここでは，コーシー・リーマンの方程式も無力である．同様な意味で多変数複素関数 $f(z_1, \ldots, z_n)$ が，各変数毎に他の変数を固定して正則ならば，全体として正則であるというハルトークスの分離正則性定理も興味深い．ここでは，$f(z_1, \ldots, z_n)$ の連続性さえも仮定しないのである．かかる主張は，実解析性では連続性を仮定しても成立しない．この先に，多変数正則関数に関する岡潔の連接性定理が現れる．今日の数学で，**岡の連接性定理**がその基礎に現れる分野は，実に広い．

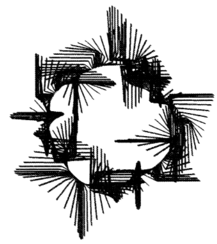
複素数を用いて表現される数学には美しく，また深い内容を感得されるものが多い．これも複素数の持つ代数性，幾何学性，そして解析性という多様性からくるものと思われる．正則関数は，その初めから既に電磁気学や流体力学の数式表現に用いられていた．虚数から始まったが，実はそれこそが自然な存在であるからこそ，科学の種々の局面で使われる．本号では，この複素数の深さと広がりを味わっていただけるものと思う．

参考文献

1)　A.I. Markushevich,『19 世紀の数学 II—幾何学・解析関数論—』，第 2 章 解析関数論（藤本坦孝訳），朝倉書店，2008.

（のぐち・じゅんじろう，東京大学大学院数理科学研究科）

複素数とは何か



難 波　誠

1. プロローグ

高校一年で学ぶ数学 I の中に，2 次方程式の解法がある．例えば，2 次方程式

$$x^2+x-1=0$$

は，完全平方式を作るために変形して

$$x^2+2\times\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-1=0,$$
$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}=0,$$
$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4},$$
$$x+\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

とし，これより

$$x=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

と解く．それでは，上の方程式の係数の符号を 1 カ所変えた方程式

$$x^2+x+1=0$$

の場合は，どうなるか．この場合も，全く同様の方法で解いてみると

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=0,$$
$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{3}{4},$$
$$x+\frac{1}{2}=\pm\sqrt{-\frac{3}{4}},$$
$$x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{-\frac{3}{4}}$$

と解ける．

しかしこの場合は，根号の中に負数が入っている．「これは変だ．ゼロでない数を 2 乗すれば必ず正数になるはずである．したがって，この方程式は解なしとするべきだ．」

これが 18 世紀までの数学の世界の常識だった．この常識をくつがえし，複素数の合理性，有用性を示し，新しい数学の地平線を切り開いていったのが，ガウスを代表とする 19 世紀の人々である．その恩恵を受けて，数学を学ぶ現代の人々は，複素数を「実在の数」と確信し，自由に活用している．

2. 複素数の定義

2 乗すると -1 になる「数」は，高校生がそれまで学んできた数（実数）では有り得ない．この「数」を一つ想定し，i と書く（オイラーの記号）．根号を用いると

$$i=\sqrt{-1}$$

である．a,b を実数として

$$a+bi$$

の形の「数」を，**複素数**とよぶ．2 つの複素数

$\alpha = a + bi$ と $\beta = c + di$ が等しい，$\alpha = \beta$，とは $a = c, b = d$ のとき，そのときのみとする．複素数 $\alpha = a + bi$ は，$b = 0$ のとき，実数 a と同一視する．また，$a = 0$ のとき $\alpha = bi$ の形の複素数を，**純虚数**とよぶ．実数でない複素数を**虚数**とよぶ．なお，i を**虚数単位**とよぶ．

複素数 $\alpha = a + bi, \beta = c + di$ の和 $\alpha + \beta$，積 $\alpha\beta$ を次で定義する：

$$\alpha + \beta = (a + c) + (b + d)i,$$
$$\alpha\beta = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

（この定義で，$\alpha + \beta$ のほうは簡単だが，$\alpha\beta$ のほうは複雑に見える．これは次のように考えるとよい．まず i を文字と思い，$(a + bi)(c + di)$ を文字式と考えて展開し，次に i^2 を -1 でおきかえる．）

この定義によれば，複素数 $\alpha = a + bi$ は，i と実数 b の積 $ib = bi$ と，実数 a の和となり，$\alpha = a + bi$ と言う書き方が，算法に合っている．

実数全体の集合を $\mathbb{R}$ と書くように，複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ と書く．$\mathbb{C}$ に和と積を上のように定義すると，$\mathbb{R}$ で成り立つような，通常の演算法則が成り立つ：

結合法則

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$
$$(\text{これを} = \alpha + \beta + \gamma \text{ と書く}),$$
$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) \quad (\text{これを} = \alpha\beta\gamma \text{ と書く}).$$

交換法則

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha, \quad \alpha\beta = \beta\alpha.$$

分配法則

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma, \quad (\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma.$$

ゼロと単位元の存在　各 α に対し，

$$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha, \quad \alpha 1 = 1\alpha = \alpha.$$

逆元の存在　各 $\alpha = a + bi$ に対し，$-\alpha = (-a) + (-b)i$ は，$\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$ をみたす．また $\alpha \neq 0$（すなわち $a^2 + b^2 \neq 0$）のとき，$\alpha^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2} i$ は，$\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = 1$ をみたす．（α^{-1} は $\frac{1}{\alpha}$ とも書く．）

一般に，これら 5 つの法則をみたす二演算を持つ集合を**体**（たい）（英語で field，独語で Körper）とよぶ．$\mathbb{C}$ は体である．$\mathbb{R}$ も体，有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ も体，1 つの体の元を係数とする有理式全体も体である．

複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ は体なので，その中で四則演算が自由にできる．

なお，前に出てきた 2 次方程式 $x^2 + x + 1 = 0$ の解

$$-\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}}$$

は，

$$= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{4} \cdot (-1)} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{4}}\sqrt{-1}$$
$$= -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}$$

と計算されるので，複素数

$$-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

である．

3. 複素数平面

高校数学において，実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は直線上の点全体の集合と同一視された．$\mathbb{R}$ と同一視された直線を数直線とよんだ．

これと同様に，複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ は，平面上の点全体の集合と同一視される．$\mathbb{C}$ と同一視される平面を**複素数平面**とよぶ．

この同一視は，次のように行われる：平面にデカルト座標を入れておく．複素数 $\alpha = a + bi$ に点 (a, b) を対応させる．この対応は 1 対 1 である．この対応を用いて，α と点 (a, b) を同一視する（図 1）．

この同一視は平凡だが，実に合理的であることが，すぐにわかる．複素数平面 $\mathbb{C}$ においては，x–軸上に実数があり，x–軸がすなわち数直線である．

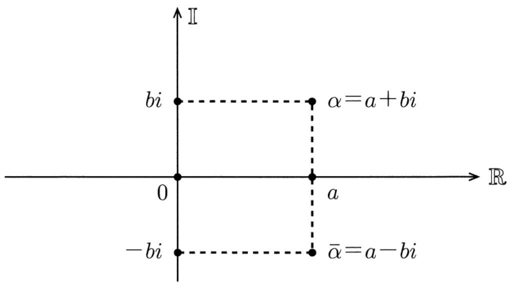


図 1　複素数平面.

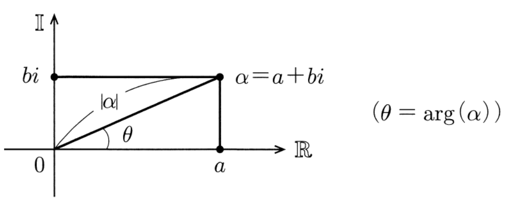


図 2　極表示.

これを**実軸**と言い，$\mathbb{R}$ であらわす．y–軸上に純虚数がある．y–軸を**虚軸**と言い，$\mathbb{I}$ であらわす．$\alpha=a+bi$ の実軸に関する対称点は $a-bi$ である．これを $\bar{\alpha}$ と書き，α の**共役**（きょうやく）**複素数**とよぶ．

複素数の和と積が，複素数平面ではどのようになっているか調べよう．

まず，和 $\alpha+\beta$ は，α, β をそれぞれ，ベクトル $\overrightarrow{0\alpha}, \overrightarrow{0\beta}$ と同一視したときの，ベクトルとしての和と一致する．差も同様である．

積 $\alpha\beta$ を複素数平面で表現するために，次のことを考える：$\alpha=a+bi$ の**絶対値** $|\alpha|$ を $\sqrt{a^2+b^2}$ と定義する（$|\alpha|=\sqrt{a^2+b^2}$）．α の**偏角** $\arg(\alpha)$ を，実軸の正方向とベクトル $\overrightarrow{0\alpha}$ の間の角（$\overrightarrow{0\alpha}$ が実軸より下にあるときは，負数）と定義する（図 2）．

このとき α は

$$\alpha=|\alpha|(\cos\theta+i\sin\theta)\quad(\theta=\arg(\alpha))$$

と書ける．これを複素数 α の**極表示**と言う（α が 0 のときは，$|0|=0$ で偏角は不定とする）．

さて，0 でない α と，0 でない

$$\beta=|\beta|(\cos\psi+i\sin\psi)\quad(\psi=\arg(\beta))$$

の積を作ると

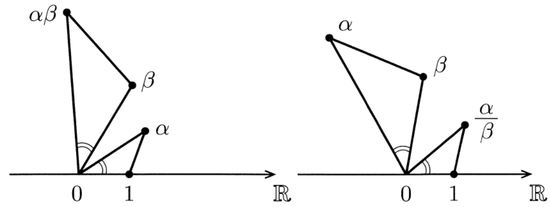


図 3　積と商.

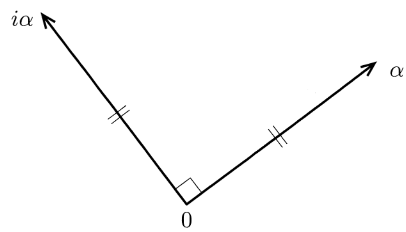


図 4　i との積.

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= |\alpha||\beta|(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\psi+i\sin\psi)\\ &= |\alpha||\beta|\{(\cos\theta\cos\psi-\sin\theta\sin\psi)\\ &\qquad +i(\cos\theta\sin\psi+\sin\theta\cos\psi)\}\\ &= |\alpha||\beta|\{\cos(\theta+\psi)+i\sin(\theta+\psi)\}\ \text{(加法定理)}\end{aligned}$$

となる．これは $\alpha\beta$ の極表示に他ならない．同様に

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{|\alpha|}{|\beta|}\{\cos(\theta-\psi)+i\sin(\theta-\psi)\}$$

となる．こうして次の命題が得られた．

命題 1　0 でない複素数 α, β に対し

(1) $|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$,
$\arg(\alpha\beta)=\arg(\alpha)+\arg(\beta)$,

(2) $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{|\alpha|}{|\beta|}$, $\arg\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)=\arg(\alpha)-\arg(\beta)$.

これより，積と商は，図 3 のように作図される．

図 3，左図で，三角形 $\triangle 01\alpha$ と $\triangle 0\beta(\alpha\beta)$ は相似であり，右図で，$\triangle 0\beta\alpha$ と $\triangle 01(\alpha/\beta)$ は相似である．

命題 1 より，複素数 α と $i\alpha$ の関係は次のようになる：ベクトル $\overrightarrow{0\alpha}$ を，0 を中心に 90° 回転したものが，ベクトル $\overrightarrow{0(i\alpha)}$ である（図 4）．

また，小学生を悩ませる (負数) × (負数) = (正数) は，$180^\circ+180^\circ=360^\circ$ と解釈できる．

α ($\alpha\neq 0$), β を固定された複素数，$z=x+yi$

を複素数平面 $\mathbb{C}$ 上の「動点」とするとき，$\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への変換

$$z \mapsto \alpha z + \beta \tag{1}$$

は，まず点 z を 0 中心に $\arg(\alpha)$ だけ回転し，次に $|\alpha|$ だけ相似拡大（$|\alpha| < 1$ なら縮小）し，最後にベクトル $\overrightarrow{0\beta}$ だけ平行移動する変換である．また，変換

$$z \mapsto \alpha \bar{z} + \beta \tag{2}$$

は，まず実軸に関する対称変換（鏡映）を行った後，(1) と同じ変換を行う変換である．

すなわち，平面ユークリッド幾何学で用いられる変換が (1), (2) であらわされる．

これから推察されるように，平面ユークリッド幾何のいろいろな定理が，複素数を用いて証明できる（例えば，文献 3) 参照）．

複素数平面は, 別名**ガウス平面**ともよばれる．複素数平面を最初に導入したのは Wessel や Argand（文献 1) 参照）だが，これを用いて深い結果を得たのがガウスなので，彼の名が付けられた．なお，複素数を複素数（complex number）と名付けたのもガウスである．

4. 正多角形の作図

複素数平面上で, 0 中心, 半径 1 の円を**単位円**とよぶ．命題 1 を，単位円上の複素数 $\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$ に，n 回適用すると，次が得られる．

命題 2（ド・モアヴルの公式）.

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

すなわち α^n は α と同じく単位円上にあり，偏角は α の偏角の n 倍になっている（図 5）.

いま，n 次方程式

$$x^n - 1 = 0$$

を考える．複素数 $r(\cos\theta + i\sin\theta)$（極表示）が，この方程式の 1 以外の解とすると，ド・モアヴルの公式より

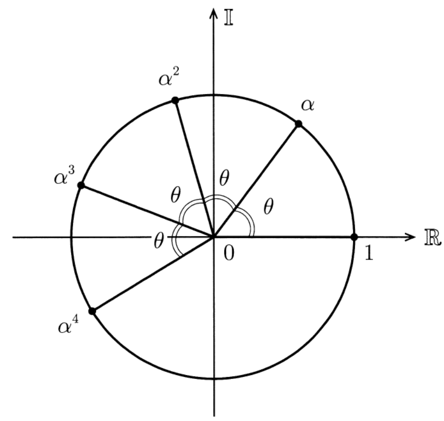


図 5　ド・モアヴルの公式.

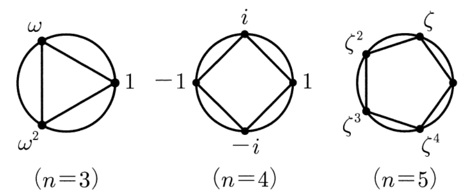


図 6　正多角形.

$$r^n\{\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\} = 1$$

となる．ゆえに

$$r = 1, \quad n\theta = k \times 360°,\ (k \text{ は整数})$$

となる．これより，方程式 $x^n - 1 = 0$ の解は，次の n 個の複素数とわかる：

$$1,\quad \zeta = \cos\frac{360°}{n} + i\sin\frac{360°}{n},\quad \zeta^2, \cdots, \zeta^{n-1}.$$

これらは **1 の n 乗根**とよばれ，すべて単位円上にあり，1 を頂点の一つとする，正 n 角形の頂点をなす（図 6）.

$\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \omega^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ は，前に出てきた方程式 $x^2 + x + 1 = 0$ の解である．

正 n 角形と方程式 $x^n - 1 = 0$ の解との，このような関係を用いて，1796 年，19 才の青年ガウスは，正十七角形の，（目盛のない）定規とコンパスによる作図を発見した．正三角形，正四角形（正方形），正五角形，正十五角形，およびそれらの辺の数を 2 倍，4 倍，…，2^k 倍した正多角形の作図は，ギリシャ以来知られていたが，それ以外に作図できる正多角形が存在するとは，誰も 2000 年間,

想像もしなかった．ガウスの発見は当時の数学界に，非常な衝撃を与えた（詳細は文献 2) 参照)．

5. 代数学の基本定理

有史以来，人類にとっての数概念の拡がりは，方程式を解こうとする意志と共にあったとする見方がある．この見方によると，例えば

$$5x = 3$$

のような方程式を解くために，分数が導入された．

また，

$$x + 5 = 3$$

のような方程式を解くために，負数とゼロが導入された．そして

$$x^2 = 5$$

のような方程式を解くために，無理数が導入された．

それぞれの場合，「そんな数は存在するはずがない！」と，激しく抵抗された．

複素数の場合も，先に述べた $x^2 + x + 1 = 0$ のような方程式を解くために導入されたと考えられるが，この場合の抵抗は非常に強かった．その理由の一つは，「数には大小関係がある」と言う，強い思い込みである．複素数には，自然な意味での大小関係はない．

複素数平面による複素数の表示は自然でわかりやすく，抵抗をやわらげるのに大いに貢献したと言われている．

さて，こうして複素数まで数概念が拡がったが，ここで問題が生じる．「複素数を係数とする方程式で，複素数の範囲では解けないものが出てくるのではなかろうか．もしそうなら，さらに数の範囲を拡げなければならない．どこまでこの作業を続けねばならないのか．」

さいわいなことに，1799 年，23 才のガウスが，次の定理を証明した（ガウスは生涯で 4 通りの証明を与えたが，他にもいろいろな証明方法が知られている（文献 1), 3) 参照)）．

定理 1（代数学の基本定理）． 複素数を係数とする任意の n 次代数方程式

$$\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \cdots + \alpha_n = 0 \quad (\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n \text{は複素数})$$

は，（重複解の重複度も込めて）n 個の複素数解を持つ．

それゆえ，「方程式を解く」と言う観点からは，これ以上，数概念を拡張する必要がない．

のみならず，定理 1 より次の定理 2 が容易に導かれる（証明は，例えば文献 1）参照）．

定理 2 実数体 $\mathbb{R}$ の有限次拡大体は，それ自身か複素数体 $\mathbb{C}$（$\mathbb{R}$ 上 2 次拡大）しか存在しない．

ここで言う $\mathbb{R}$ の**有限次拡大体**とは，$\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間

$$K = \mathbb{R}\cdot 1 + \mathbb{R}\cdot\alpha_2 + \cdots + \mathbb{R}\cdot\alpha_n$$

（$\{1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ がこのベクトル空間の一つの基底）で，積も定義されていて，これ自身，体になっているものである（もちろん，有理関数体のような，$\mathbb{R}$ を含む無限次拡大体はいろいろ存在する）．

この定理 2 は，**複素数体こそ最も広い究極の数体である**と主張している．もし，それでもあえて数概念を拡げようとすると，無理が生じて，数の法則のどれかが成り立たなくなる．事実，ハミルトンの発見した**四元数体**は，厳密な意味での体でなく，乗法の交換法則が成り立たない（文献 1））．

6. エピローグ

ガウスは，オイラーが研究した**楕円積分**

$$x = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}}$$

の逆関数 $s = s(x)$ を，x が**複素変数** z の場合に拡張して考察し，その本質（二重周期性）を発見した．これが，**楕円関数**の最初の発見である．この楕円関数 $s = s(z)$ は，**ガウスのレムニスケート関数**とよばれる．

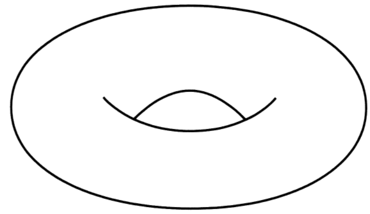


図 7　トーラス．

その後，コーシー他の人々により，複素変数，複素数値の関数，すなわち**複素関数**の理論が構築された．

一方，上の積分は，座標が (s,t) である平面上の曲線

$$t^2 + s^4 = 1 \qquad (3)$$

上の**微分形式** $\frac{ds}{t}$ の積分と考えられる．(s,t) を実数の座標でなく，複素数の座標（$s = s_1 + is_2$, $t = t_1 + it_2$）と考えると，(3) の「曲線」は，4 次元空間 $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}\times\mathbb{C}$ の中の，2 次元の「曲面」をあらわしている．その曲面は**トーラス**（ドーナツの表面）（から 1 点をぬいたもの）であることがわかる（図 7）．

$\frac{ds}{t}$ は，この曲面上の微分形式である．

このような考察が，今日の代数幾何学，複素幾何学の始点の一つとなった（文献 4）参照）．

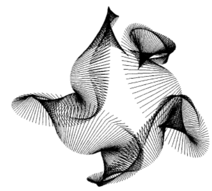
参考文献

1) H. エビングハウス他（成木勇夫訳）『数　上，下』，シュプリンガー・ジャパン，1991.
2) R. ハーツホーン（難波　誠訳）『幾何学　I, II』，シュプリンガー・ジャパン，2007, 2008.
3) 宮西正宜，増田佳代『複素数への招待』，日本評論社，1998.
4) 難波　誠『代数曲線の幾何学』，現代数学社，1991.

（なんば・まこと，追手門学院大学経済学部）

複素関数のキーワード

正則関数，コーシーの積分定理，留数定理など



真島 秀行

1. はじめに――個人的な複素数の体験から

複素数に初めて本格的に接したのは高校２年生の頃である．当時の高等学校学習指導要領には，行列のことはなかったけれども複素数のことはあり，数学 II B の教科書に平面上の幾何的なこととの対応（垂直二等分線やアポロニオスの円など（図 1）を複素数を用いて表したり，正多角形の頂点を記述したり）などが書いてあり，面白かった．

大学入学後に習う微分積分学では，何度か微分できるがさらには微分できない実数値関数の話がかなりあったが，２年生で習った複素関数論においては，複素関数として１度微分可能な関数は何度でも微分でき，さらに，局所的に収束する整級数に展開されたり，簡明なコーシーの積分定理など扱いやすい多くの性質をもち，そして，それらの性質が本質的に同値であるという天国のような世界であることを知った．

また，等角写像が，電磁気の理論の理解に有用であることをファインマンの物理学シリーズの電磁気学「2 次元の場：複素変数の関数」で読み，非常に感激した．

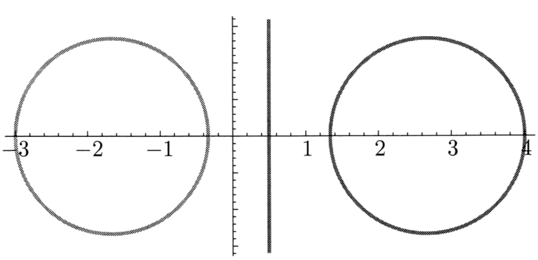


図 1　左から $2|z+1| = |z-1|$, $|z| = |z-1|$, $|z| = 2|z-2|$.

このように，**正則**な，すなわち，**複素解析的**な関数の範囲内だけでも多くの重要なことがあるが，さらに，特異点があるような関数を考えると，留数の原理が成り立ち，実数値関数の難しい定積分が，代数的な計算で楽々とでるようになったりする．

この小論では，複素関数論の基礎的な事柄について主に解説する．「特異点での性質が解析関数を決める」というリーマンの観点，この境地に読者を誘いたいのである．

2. 複素関数の解析性と正則性

複素平面 $\mathbf{C}$ 上の点 c を中心とする半径 r の開円板 $D(c;r) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z-c| < r\}$ などの複素領域 D で定義された複素数値関数 $f(z)$ を考える．

$f(z)$ が点 c で**複素解析的**であるとは，点 c で（複素関数として）微分可能なこと，すなわち，

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \alpha$$

が存在することである．このとき，この極限値 α を $z = c$ での微分係数とよび，$\frac{df}{dz}(c)$, $f'(c)$ などで表す．

これは，非常に強い条件で，c に四方八方からどのように近付いても同一の極限値があることを

意味する．従って，特に，c に，実軸に平行に近づいても，虚軸に平行に近付いても同じ極限値 α をもち，複素数 z を $z = x + yi$ と 2 つの実変数 x, y と虚数単位 i を用いて表し，複素関数 $f(z)$ を $f(z) = u(x,y) + v(x,y)i$ と実 2 変数関数 $u(x,y), v(x,y)$ を用いて表せば，x に関する偏微分係数と yi に関する偏微分係数が等しくなり，

$$\frac{\partial u}{\partial x}(c) + i\frac{\partial v}{\partial x}(c) = \frac{\partial u}{\partial y}(c)\frac{1}{i} + \frac{\partial v}{\partial y}(c)\frac{1}{i}i$$

が成り立つ．すなわち，次の式が成り立つ．

$$\frac{\partial u}{\partial x}(c) = \frac{\partial v}{\partial y}(c), \quad -\frac{\partial v}{\partial x}(c) = \frac{\partial u}{\partial y}(c).$$

これをコーシー・リーマンの関係式と言う．

D の任意の点 z で f が複素解析的であるとき，D で f は複素解析的であると言われる．そのとき，D 上の点 z に対して $f'(z)$ を対応させる関数が定まり，f の導関数と呼ばれ f' などで表される．

例　例えば，z の n 次多項式の関数は複素平面 $\mathbf{C}$ で複素解析的である．しかし，$f(z) = \bar{z} = x - yi$ など $\bar{z}$ の多項式は複素平面 $\mathbf{C}$ のどの点でも複素解析的ではない．また，有理多項式，すなわち，2 つの多項式 $P(z)$ と $Q(z)$ の商 $g(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ は $Q(z) = 0$ の点の全体を S とすると，複素平面 $\mathbf{C}$ から S を除いた領域 $\mathbf{C} - S$ で複素解析的である（後に見るように $g(z)$ は S の各点を孤立特異点とし極をもつ）．

D で f が複素解析的であるとき，D で

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

が成り立つ．これを**コーシー・リーマンの方程式**と言う．実は，この式が成立することが，複素解析的であるための必要十分条件である．これから，特に，u, v は調和関数になること，すなわち，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

という偏微分方程式を満たすことが分かる．よって，$u(x,y)$ も $v(x,y)$ も静電ポテンシャルを表し，

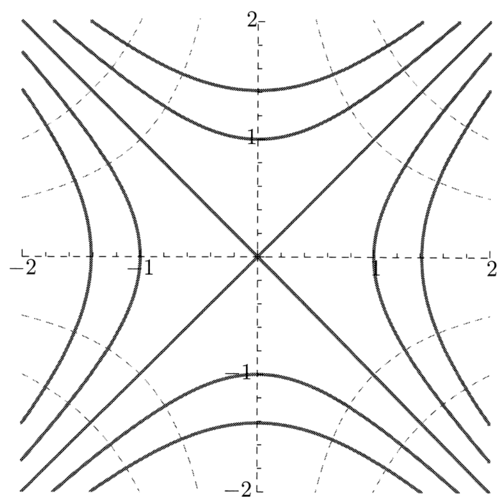


図 2　静電場の例，$\Re z^2 =$ 定数，$\Im z^2 =$ 定数．

ある静電場の問題を解くのに使えることになる（文献 3) 参照）．

なお，コーシー・リーマンの方程式は，

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{i\partial y}\right)$$

と定めておくと，

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u(x,\, y) + v(x,\, y)i) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

とも書けることに注意したい．つまり，$\bar{z}$ については定数，依存しない関数である．

3. コーシーの積分定理

複素領域 D 上で複素解析的な関数 $f(z)$ に対して，区分的に滑らかな曲線 $\gamma : (z(t))_{t\in[a,b]}$ （$z(t) = x(t) + y(t)i$ と表したとき，有限個の点を除いて，$x(t), y(t)$ が微分可能で有界である曲線）上の（複素）積分を線積分として定める．

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(z(t))\frac{dz(t)}{dt}dt.$$

これは，$f(z) = u(x,y) + v(x,y)i$ かつ $z = x + yi$ であったことから，

$$\int_a^b \left(u(x(t), y(t))\frac{dx(t)}{dt} - v(x(t), y(t))\frac{dy(t)}{dt} \right) dt$$
$$+ i\int_a^b \left(v(x(t), y(t))\frac{dx(t)}{dt} + u(x(t), y(t))\frac{dy(t)}{dt} \right) dt$$

に等しい．この値は曲線のパラメータ表示によらないことに注意しよう．

D 内の曲線 $\gamma:(z(t))_{t\in[a,b]}$ が閉曲線であるとは $z(a)=z(b)$ が成り立つことを言い，**単一閉曲線**であるとは，それ自身に交点のないこと，すなわち，$a<t<t'<b$ に対して $z(t)\neq z(t')$ となることである．

複素平面全体，長方形や円板などの穴なく閉曲線を1点に連続的に縮められる領域を単連結領域と言うが，そこで複素解析的な関数について次の簡明で強力な定理が成立する．

定理（コーシーの積分定理） 複素平面上の単連結領域内の任意の複素解析的な関数 $f(z)$ と任意の単一閉曲線 $\gamma:(z(t))_{t\in[a,b]}$ に対して

$$\int_\gamma f(z)dz=0$$

が成り立つ．

この証明法は，いくつか知られているが，γ の囲む領域を Ω とするときのグリーンの公式から

$$\int_\gamma\left(u\frac{dx}{dt}-v\frac{dy}{dt}\right)dt$$
$$=\iint_\Omega\left(-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy,$$
$$\int_\gamma\left(v\frac{dx}{dt}+u\frac{dy}{dt}\right)dt$$
$$=\iint_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy$$

であり，コーシー・リーマンの方程式をみたすことから直ちに導かれることを注意しておく．

点 c を中心とする半径 r の閉円板を含む領域で複素解析的な関数に対して，関数 $\frac{f(z)}{z-c}$ は，任意の ε に対する円環領域 $\{z\,|\,\varepsilon\le|z-c|\le r\}$ で複素解析的な関数だから，コーシーの積分定理を適用すると，曲線を円周の表し方にして

$$\int_{|z-c|=\varepsilon}\frac{f(z)}{z-c}dz=\int_{|z-c|=r}\frac{f(z)}{z-c}dz$$

が成り立ち，左辺の ε を0に近づけた極限が $2\pi if(c)$ となることから，

定理（コーシーの積分公式） 複素平面上の領域 D で複素解析的な関数 $f(z)$ に対して

$$f(c)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r}\frac{f(z)}{z-c}dz.$$

が成り立つ．

この式を文字を変えて書き，

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z|=\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,$$

とし，さらに積分記号下で微分することによって，

系（コーシーの積分公式） 複素平面上の領域 D で複素解析的な関数 $f(z)$ に対して

$$\frac{d^n}{dz^n}f(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{|\zeta-z|=\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta$$

が成り立つ．ここで，n は自然数とし，ρ は十分小な正の実数とする．

4. 整級数展開，複素解析性と同値な性質

コーシーの積分公式において，

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-c)-(z-c)}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(z-c)^k}{(\zeta-c)^{k+1}}$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(z-c)^k}{(\zeta-c)^{k+1}}+\frac{(z-c)^n}{(\zeta-c)^n}\frac{1}{\zeta-z}$$

という等比級数の和の公式を用いることにより次のことが示される．

定理 複素平面上の領域 D で複素解析的な関数 $f(z)$ は，D 内の任意の点 c の十分小さな円板内で整級数に展開される．すなわち，$z\in D(c;r)\subset D$ ならば，

$$f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k(z-c)^k.$$

ここで，係数 a_k は次のように与えられる．

$$a_k=\frac{f^{(k)}(c)}{k!}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z|=\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta.$$

整級数 $\sum_{k=0}^{+\infty}a_k(z-c)^k$ に対しては，次のような性質をもつ実数 r が定まる．すなわち，$|z-c|<r$ となる z に対しては絶対収束し，$|z-c|>r$ となる z に対しては発散するような正の実数 r が

ある．これを**収束半径**と言う．

公式（コーシー・アダマール） 収束半径 r は $\sqrt[k]{|a_k|}$ の上極限の逆数として与えられる．すなわち，

$$\frac{1}{r} = \varlimsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

ここで，上極限が 0 であることは収束半径が無限大 $+\infty$ であることを意味する．

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|}, \text{あるいは}, \lim_{k\to+\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}.$$

が存在するならば，その逆数が収束半径を与える．これらは等比級数 $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|z-c|^k}{k!}$ と比較して評価することによってわかる．

例 整級数で定義される複素解析的な関数の例としては次のようなものがある．

$$\exp z = e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} z^k,$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k},$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}.$$

これらは実数に対して定義されていた指数関数，余弦関数，正弦関数のテイラー展開を用いて複素関数に拡張したものであり，収束半径は無限大である．これらの間には，**オイラーの関係式**

$$\exp iz = e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

が成立している．これを用いると，複素数の極形式表示が簡明に表せる．

$$z = |z|(\cos \arg z + i \sin \arg z) = |z| e^{i \arg z}.$$

対数関数

$$\log(1+z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} z^k$$

や任意の複素数 α に対するべき関数

$$(1+z)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} z^k$$

も定義でき，これらの収束半径は 1 である．

さて，整級数は**項別微分可能**である．すなわち，次のことが成り立つ．

命題 円板 $D(c\,;r)$ において，整級数 $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(z-c)^k$ が収束し，複素関数 $f(z)$ を表すならば，それは（複素）微分可能であり，整級数を項別に微分して得られる級数が表す関数が導関数と一致する．すなわち，次のように計算できる．

$$f'(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} k a_k (z-c)^{k-1}.$$

以上見てきたことから，複素関数に対して，局所的に，複素解析的であること，正則であること，コーシーの積分定理が成り立つこと，整級数展開されることは同値であることがわかる．

5. 複素解析的な関数の性質

複素平面上の領域 D で複素解析的な関数 $f(z)$ に対して，コーシーの積分公式を用いて絶対値の関数 $|f(z)|$ や任意階の導関数の絶対値の関数（従って整級数展開の係数）を積分する円周 $\{\zeta;\, |\zeta-z| = \rho\}$ 上の $|f(z)|$ の最大値を使って評価する式（コーシーの評価式）が得られる．すなわち，

$$\left|\frac{d^n}{dz^n} f(z)\right| \leq \left|\frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta-z|=\rho} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|^{n+1}} |d\zeta|\right|$$
$$\leq \frac{n!}{\rho^n} \max\{\,|f(\zeta)|\,;\, |\zeta - z| = \rho\}$$

が成り立つ．ここで，n は 0 以上の整数でよく，半径 ρ の円板がすべて $f(z)$ が複素解析的であるような領域に入っていればよい．このことから，次のような簡明な定理が得られる．

定理（最大値の原理） 複素平面の領域 D で複素解析的な関数 $f(z)$ は定数でないとき $|f(z)|$ は D において最大値をもたない．

定理（リュービルの定理） 複素平面全体 $\mathbf{C}$ で複素解析的な関数 $f(z)$ が有界ならば，（例えば原点中心の整級数展開の 1 次以上の係数が 0 となり）定数でなくてはならない．

6. 複素関数の特異点

穴開き円板 $\dot{D}(c;r)=D(c;r)-\{c\}$ で複素解析的な複素数値関数 $g(z)$ に対して, $0<\varepsilon<|z-c|<\rho<r$ であれば，コーシーの積分公式から

$$g(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z|=\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\eta-z|=\varepsilon}\frac{f(\eta)}{\eta-z}d\eta$$

と表すことができる．この第1項は, $(z-c)$ の正べき級数 (整級数) で表されるが, 第2項は $(z-c)$ の負べき級数で表され，**特異部**と言われる．

$$g(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}b_k(z-c)^k.$$

これを，**ローラン展開**と言う．負べきの項が有限であるとき，$g(z)$ は $z=c$ に**高々極をもつ**と言う．$b_{-m}\neq 0, b_k=0\,(k<-m<0)$ である場合, $g(z)$ は $z=c$ に m 位の極をもつと言う．負べきの項が無限であるとき，$g(z)$ は $z=c$ で**真性特異**であると言う．

例 $\frac{1}{(z-c)^m}$ は $z=c$ に m 位の極をもつ．

例 $\frac{1}{\sin z}$ は $n\pi$(n は整数) に1位の極をもつ．

例 $\exp\left(\frac{1}{(z-c)^m}\right)$ は $z=c$ で真性特異である．

領域 D の中の孤立した点の集合を S とする．領域 $D-S$ で複素解析的な関数 $g(z)$ が S の各点に高々極しかもたないならば，**有理型関数**であると言われる．

有理関数は, 拡張された複素平面, すなわち, 複素平面に無限遠点 ∞ を付け加えた領域（それは, 球面と見なせて，リーマン球面と言われる）で有理型な関数であるが，特異点とそこにおける特異部を与えれば一意に決まってしまう．というのは, 有理関数から各特異点の特異部を引き去った関数を考えると，拡張された複素平面における複素解析的な関数となるが,（$|f(z)|$ がコンパクト集合上の連続関数なので最大値をとり）有界となるので, リュービルの定理により，定数となることがわかるからである．

7. 留数定理

定義 $g(z)$ の $z=c$ におけるローラン展開の1位の極の係数 b_{-1} を**留数**と言う．b_{-1} を, $\mathrm{Res}(g;c)$ などと記す．

$g(z)$ が m 位の極をもって

$$g(z)=\frac{b_{-m}}{(z-c)^m}+\cdots+\frac{b_{-1}}{(z-c)} +b_0+b_1(z-c)+b_2(z-c)^2+\cdots$$

と表されているとき,

$$b_{-1}=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to c}\left\{\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}((z-c)^m g(z))\right\}$$

が成り立っている．

留数の言葉の意味は次の例から知られる．

例 原点を中心とする半径 r の円周 $|z|=r$ は, $z(t)=re^{it}$, $(t\in[0,2\pi])$ と極形式で表しておくと，簡単な計算で次がわかる．

$$\int_{|z|=r}z^n dz=\int_0^{2\pi}r^n e^{int}\frac{dre^{it}}{dt}dt =\int_0^{2\pi}r^{n+1}e^{i(n+1)t}idt =\begin{cases}0 & (n\neq -1),\\ 2\pi i & (n=-1)\end{cases}$$

従って，γ を穴開き円板 $\dot{D}(c;r)$ 内の c を一周する単一閉曲線とするとき,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z)dz=b_{-1}$$

が成り立つ．コーシーの積分定理を応用することにより，次の定理が示せる．

定理（留数定理） 領域 D の中の孤立した点の集合を S とする．領域 $D-S$ で複素解析的な関数 $g(z)$ と $D-S$ の中の単一閉曲線 γ に対して,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(\zeta)d\zeta=\sum_{c\in S(\gamma)}\mathrm{Res}(g;c)$$

が成り立つことがわかる．ここで, $S(\gamma)$ は γ が囲む領域内に含まれる S の部分集合を表すものとする．

これを使えば，積分を代数的な計算に帰着できる．いくつか計算例を見てみよう．

例　実数値関数 $\frac{1}{1+x^2}$ の無限区間 $(-\infty,+\infty)$ 上の広義積分は存在して

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\pi$$

となることは，$\frac{1}{1+x^2}$ の原始関数が $\arctan x$ であることからわかるが，複素関数 $\frac{1}{1+z^2}$ に留数定理を適用して代数的な計算でも求められる．原点を中心とする半径 R の円板の上半平面に含まれる部分 $D_R^+=\{z;\,|z|\leq R\}\cup\{z;\,\Im z\geq 0\}$ にある極は $z=+i$ だけで $\mathrm{Res}\left(\frac{1}{1+z^2};+i\right)=\frac{1}{2i}$ である．γ_R を D_R^+ を囲んでいる曲線，すなわち，原点を中心とする半径 R の円周の上半平面に含まれる部分と実数区間 $[-R,R]$ を併せたものとすれば

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R}\frac{1}{1+\zeta^2}d\zeta=\frac{1}{2i}$$

となるので，

$$\int_{\gamma_R}\frac{1}{1+\zeta^2}d\zeta=\pi$$

を得る．R を無限大に近付けたときの極限を考えると，上半円周の部分の積分が0に近付くので，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R}\frac{1}{1+\zeta^2}d\zeta=\pi$$

がわかる．

原始関数がすぐには求まらないような関数について同様の計算を体験してみれば，留数定理による計算の有利さがわかると思う．例えば，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}dx = 2\pi i\left(\mathrm{Res}\left(\frac{1}{1+z^4};e^{\pi i/4}\right)+\mathrm{Res}\left(\frac{1}{1+z^4};e^{3\pi i/4}\right)\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

実は，p,q が $0<q<p$ をみたす2つの自然数とすると，

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{q-1}}{1+x^p}dx=\frac{\frac{\pi}{p}}{\sin\frac{\pi q}{p}}$$

であることを，複素関数 $\frac{z^{q-1}}{1+z^p}$ と角領域

$$S_R^+=\left\{z=re^{i\theta};\,0\leq r\leq R,\quad 0\leq\theta\leq\frac{2\pi}{p}\right\}$$

に対して留数定理を適用して求められる．さらに，これを利用して，**ガンマ関数と正弦関数の間の関数等式**

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$$

も導ける．ガンマ関数は階乗 $n!$ を複素数に拡張した関数として知られている．実部が正の複素数 z に対しては，積分

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$$

で定義され，それから導かれる関数等式

$$\Gamma(1+z)=z\Gamma(z)$$

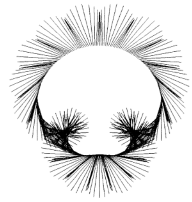
により複素平面に有理型関数として拡張できる．負の整数 $-n$ のところに1位の極をもち，留数は $\frac{(-1)^n}{n!}$ となっている．よって，$\Gamma(z)\Gamma(1-z)$ は，整数のところに1位の極をもち，留数は，$\frac{(-1)^n}{\pi}$ である．一方，$\sin\pi z$ は整数 n のところに1位の零点をもつので，$\frac{1}{\sin\pi z}$ は1位の極をもち，留数は，$\frac{(-1)^n}{\pi}$ である．従って，$\Gamma(z)\Gamma(1-z)$ と $\frac{\pi}{\sin\pi z}$ とは特異性が一致するが，上に述べたように実は同一の有理型関数なのである．上の証明は，参考文献1)による．他に，参考文献2)では，この小論では述べられなかったが，これらの関数の逆数の関数の無限積表示を用いて示している．興味をもたれた読者は見比べてほしい．

参考文献

1) 一松　信，『留数解析—留数による定積分と級数の計算—』，共立出版 (1979).
2) Lars V. Ahlfors, “Complex Analysis, 3rd edition”, McGraw-Hill (1979).
3) ファインマン，レイトン，サンズ（宮島龍興訳)，『ファインマン物理学 III，電磁気学』，岩波書店 (1969).

（まじま・ひでゆき，
お茶の水女子大学大学院人間文化創成科学研究科）

微分方程式と複素関数



吉田 正章

1. 複素数

私は未だに複素数がよく分かってないと自分で思ってます．2次の代数方程式 $z^2+1=0$ には解が2つあるだろう，そのうちの1つを i と書いて（もう一方は $-i$ だろう），2つの実数 x, y に対して，$x+iy$ の形のものを四則演算出来る数として，複素数を導入するのでしょうけど，私にはどうも気持ちが悪い．2つの解は見分けがつかない（方程式が $z^2-1=0$ なら解は1と -1 だから，正負で区別がつくのだが）でしょ，ですから私の i とあなたの i とは違うかもしれない，私の考えている正則関数はあなたには反正則関数に見えるかもしれない．こんなことで悩んでいるのは私だけなのだろうか，皆さんはこの問題を考えた末に解決されていらっしゃって晴れ晴れとした顔をされているのか，そもそもこんなことを悩まれなかったのか．私は学部の1年生に複素数の計算法を講義するときいつも，私の理解していないことを生徒に教えていることを後ろめたく思う．特に複素平面を教えるときに，黒板に実軸と虚軸を書き，虚軸上の上のほうに i を，下の方に $-i$ と書き込むときが特に嫌である．昔 Gauss は人心を惑わすからと言って複素数を大っぴらに語らなかったと伝えられているが，私にはよく分かるというか，私は未だ惑わされているのである．

しかしまあ皆さんはそんな心配をせずに自由に複素数を使っておられて，未だに矛盾が出たという話も聞かないから，こういう悩みには蓋をして先に進もう．

2. 関数

関数をどのくらい知っているかで数学の学習度が測られるという話がある．ここで言う関数とは，何らかの形の式で書けているものか，少なくとも（解の様子がある程度よく分かる）きちんと書けている微（差）分方程式の解程度の意味である．このような関数の定義は前々世紀のもので，現代では違うと言う人もあるかもしれないが，現代音楽（聴いて楽しくない），現代美術（見て美しくない），現代建築（住んで心地好くない）等の例で分かるように，「現代」とは小理屈ばかりで詰まらないということを表す形容詞であるから，現代数学もそんなものと考えればちっとも怖くないでしょう．

2.1 素朴な冪関数

高等学校で習う関数で，多項式や有理式でないものとして，冪関数があります．それを復習しましょう．x を変数として，

$$x^0=1,\ x,\ x^2, \ldots, \quad x^{-1}=\frac{1}{x}, \quad x^{-2}=\frac{1}{x^2}, \ \ldots$$

は多項式や有理式というか，積ですから問題なく定義されます；$x^n x^m = x^{n+m}$ も成立します．次に $x^{1/n}$ は $x>0$ のとき，n 乗したら x になる数は沢山あるかもしれないが，正の実数では唯一つなので，それのことと定義します．すると $x^{n/m}$

はこれらの合成 $(x^n)^{1/m}$ とか $(x^{1/m})^n$ で定義します．こうして，有理数（整数分の整数）r に対して冪関数 x^r が定義されたわけです．では指数が無理数のとき例えばx^π はどうするかというと，無理数 π に収束する有理数列（幾らでもある）を r_j として，関数 x^{r_j} の極限を考えるのだが，そんなものが果たして収束するのか，点列の選び方に依らないのか，収束した先の関数が微分出来るのか，そもそも連続なのか，積公式 $x^r x^s = x^{r+s}$ は成立するのか等心配の種は尽きない．ましてや冪指数が複素数になったら，この先どうやっていいのか途方に暮れるでしょう．

2.2 素朴な指数関数と対数関数

心配し出したら切りがないので，正の実数 x と実数 r に対して冪 x^r が無事定義出来たとしましょう．ここで発想を転換して，正の実数 a と実数 x に対して a^x を x の関数と考えたものを指数関数と呼ぶ．$a \neq 1$ ならこの関数は単調 (グラフを描いて納得していただく) なので，$y = a^x$ の逆関数が考えられ，それを対数関数といって $x = \log_a y$ と書くという段取りです．指数関数の公式 $a^{x_1}a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$ を認めれば $\log_a(y_1y_2) = \log_a y_1 + \log_a y_2$ となるでしょう．もう随分危ない橋を渡ってきてますが，無謀にもこの関数 $\log_a y$ の微分を試みます．すると，遂に出ました難解極限

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}.$$

これが有限な値に収束すること（易しくない）を認め，その極限を e （わけの分からない数だが，$1 < e < 3$ は分かる）と書き，$\log_e y$ を単に $\log y$ と書くと，何と

$$\frac{d\log y}{dy} = \frac{1}{y}$$

という呆気ないくらい簡単な結果になり，逆関数の微分公式を使うと

$$\frac{de^x}{dx} = e^x$$

も分かるというわけです．

3. 微分方程式

指数が整数の冪関数から出発して数々の怪しげなことをやって到達した上の 2 式を参考にして，微分方程式

$$\frac{du}{dx} = u, \quad u(0) = 1, \tag{1}$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{1}{y}, \quad v(1) = 0 \tag{2}$$

を考えます．存在と一意性の定理を信じ（証明を追って理解しても関数の知識は増えない）て，今までの推論をすべて忘れて頂いて，新たに，(1) の唯一つの解として指数関数 $\exp x$ を定義し（時に応じて $\exp x$ を e^x と記すが e はもうわけの分からない数を表すのでなく exponential の頭文字位に考える），(2) の唯一の解（少なくとも $y=1$ の周りで定義されている）として，対数関数 $\log y$ を定義すれば，x や y が（正の）実数でなくとも複素数でも問題なく定義されてしまうのである．このように微分方程式は関数を定義する便利な方法（の一つ）であることが分かる．

怪しげな冪関数は以下のようにやっつけるのが常道である．一つは，指数関数と対数関数は互いに逆であったことを思い出す：$x = e^{\log x}$ （今までの文字の使い方を踏襲すれば x は y と書くべきだが，まあ許してください）．その両辺を a 乗したような式

$$x^a = e^{a\log x} \tag{3}$$

をもって，冪関数の定義とする（右辺はちゃんと定義されている）．今一つは，微分方程式

$$\frac{dw}{dx} = \frac{a}{x}w, \quad w(1) = 1 \tag{4}$$

の唯一の解とするものである．

方程式 (2) と (4) の右辺の分母に y や x があるので，その解は原点付近で通常でないことが起こることを暗示している．

4. 関数のグラフ

関数 $f(x)$ が与えられたとき，その様子を知るた

めに関数のグラフは便利である．それは xy-平面の点 $(x, f(x))$ の全体として定義されていた．これは変数 x 関数の値 $f(x)$ 共に実数のときは平面上の曲線で目に見えるから役に立ったのであり，これが共に複素数になると，4 次元空間内の曲面になり，理論的に利用されることはあろうが，視覚に訴えることでは役に立たない．

しかし，何とか複素変数 複素値関数を絵を描いて理解したいと思うのは自然であろう．それには，源の x-(複素) 平面と的の y-平面の 2 つを用意し，x がここにあったらと左手の人指し指で指し，像の $y = f(x)$ はこの辺りと右手の人指し指で指すということをするのである．左手の動きに応じて，右手が滑らかに動くようになればその関数をよく知ったことになろう．右手を動かして，それに応じて左手が動かせば，逆関数を理解したことになろう．

書いたものに手の動きを少しでも再現するには，多色鉛筆を使って，対応する 2 点に同じ色や印を付けたりする．ここでは色も使えないから色々不便だけどやってみましょう．

4.1 指数関数と対数関数

関数 $x \mapsto y = \log x$ とその逆 $y \mapsto x = \exp y$ を図示すれば図 1 のようになろう．x が単位円周上を 1 から正の向きに回ると，像は y-平面の虚軸を（ここで冒頭で述べた不安が横切るが）上に向かって移動し，x が -1 に達すると，像は πi にいき，続けて x がもう半周して 1 に帰ってくると，像は $2\pi i$ に達するという具合に読みます．

x-平面の上半分 $\mathbf{H}_x = \{x \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im}\, x > 0\}$ ($\mathrm{Im}\, x$ は x の虚部を表す）は y-平面内の水平に伸びた帯にいくことは後で使います．

4.2 冪関数

冪関数 x^a は (3) より 3 つの関数の合成でした：

$$x \xrightarrow{\log} \log x \xrightarrow{\times a} a \log x \xrightarrow{\exp} \exp(a \log x) = x^a.$$

対数関数は指数関数の逆関数であるから，冪写像 $x \mapsto x^a$ は a 倍する写像 $\times a$ と共役であると考えられるが，以下に見るようにかなり複雑な関数である．x-平面の上半分 $\mathbf{H}_x$ がどういう風になって

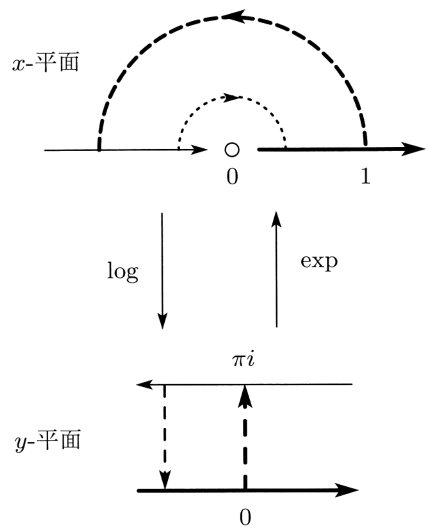


図 1　対数関数と指数関数．

ゆくかを図示する．複素数倍写像 $y \mapsto ay$ は y を $|a|$ 倍し，$\arg a$ だけ回転する．a が実数でも純虚数でもないと，y-平面の帯は斜めになり，それを exp で写すと何ともややこしいことになるので，後回しにする．

4.2.1 指数 a が実のとき

簡単のため $0 < a < 1$ とする．y-平面の帯は幅が狭くなるだけで exp で写すと（図 2)，結局写像 $x \mapsto z = x^a$ は上半分 $\mathbf{H}_x$ を開角 πa の扇

$$\{z \in \mathbf{C} \mid 0 < \arg z < \pi a\}$$

に写すことが分かる．この場合は簡単である：扇の開け閉めである．下半部分がどう写されるかも容易に想像出来るでしょ．

4.2.2 指数 a が純虚のとき

指数 a が純虚のとき，$a = i\theta$ と置き簡単のため $0 < \theta < 1$ とする．上半分 $\mathbf{H}_x$ は y-平面では幅 π の水平な帯で，それが 90 度回転され幅が θ 倍され，縦に無限に伸びた帯になる．それを exp で写すわけだから，z-平面では 0 の周りの円環 $\{z \in \mathbf{C} \mid e^{-\pi\theta} < |z| < 1\}$ をぐるぐる無限に回ることになる．それは見難いから，源を半円環 $\{x \in \mathbf{H}_x \mid 1 < |x| < e^{\pi/\theta}\}$ 上に制限すれば，それを半円環 $\{z \in \mathbf{H}_z \mid e^{-\pi\theta} < |z| < 1\}$ に 1：1 に写す．式で書くと面倒そうに見えるが図 3 を見

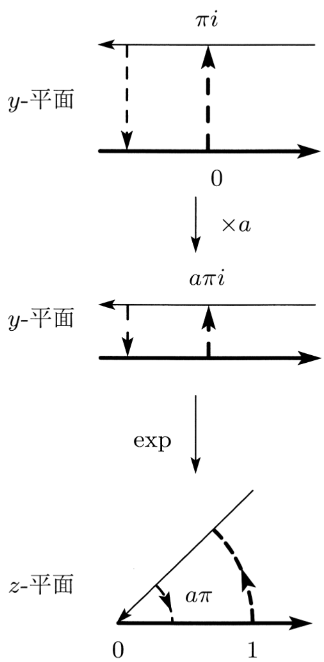


図 2　実指数の冪関数.

れば分かるであろう.

半円環は昔なら馬蹄と言ったが，馬が身近に居なくなった現在，（昔は座り方を教えてもらわないと分からなかったくらい珍しかったが，今は何処にでもある西洋便器の）便座と言った方が通りがいいかもしれない．純虚指数の冪関数は便座を便座に写すが，面白いことに，円弧は区間に対応し，区間は円弧に対応する．このことから次の不思議なことが分かる．行った先で原点に近付くためには源で原点の周りをぐるぐる回らなくてはいけない，源で原点に近付いても，像はぐるぐる回るだけで原点には近付いてくれないのである．

4.2.3 指数 a が実でも純虚でもないとき

このときは y-平面の斜めの帯を exp で写すわけだから，像は螺旋帯状である．さざえの壷焼を食べるとき内臓がうまく出ると嬉しいものだが，それに似ているので，業界用語で「さざえのうんこ」と言う．便座 $\{x \in \mathbf{H}_x \mid e^{-\pi} < |x| < 1\}$ の像を $a = e^{it}$, $0 \leq t \leq 1/2$ と動かしながら描いてみるのも一興である．綺麗な絵がどうもうまく描けない，まずい絵ですが図 4 は中間点（$t = 1/4$）の様子です；線対称が見える．

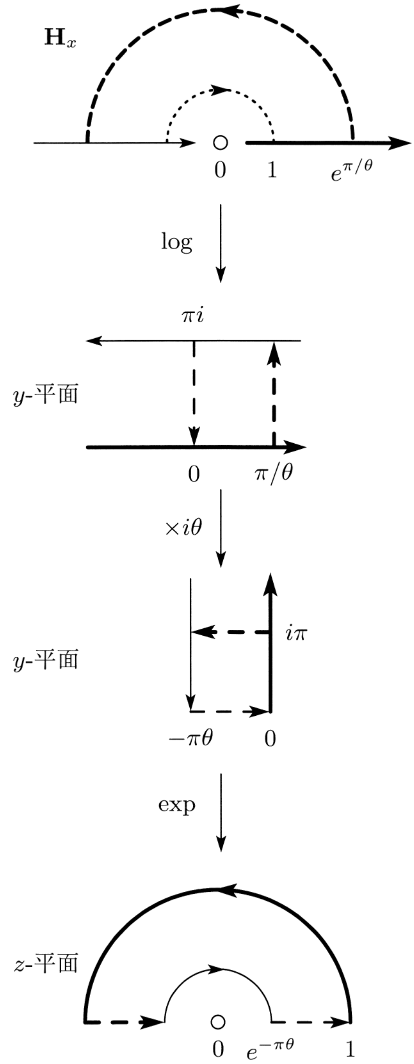


図 3　純虚指数 $a = i\theta$, $\theta > 0$ の冪関数.

4.2.4 等角写像

扇の開閉だったり便座だったりさざえのうんこだったりしましたが，これらに共通の性質として等角性があります．関数 $z = f(x)$ として，源の x-平面の点 x を通る任意の角度 θ だけ開いた 2 直線は，的の z-平面の点 $f(x)$ を通る 2 曲線に写されますがその 2 曲線のなす角は，同じ θ だというのです．このことは冪関数でなくても，f が正則ならば微分が消えていないどんな点でも成り立ちます．

扇の開閉ですから扇の蝶番では流石に駄目です（$a = 1$ でない限り，$x = 0$ で正則でないか，正則

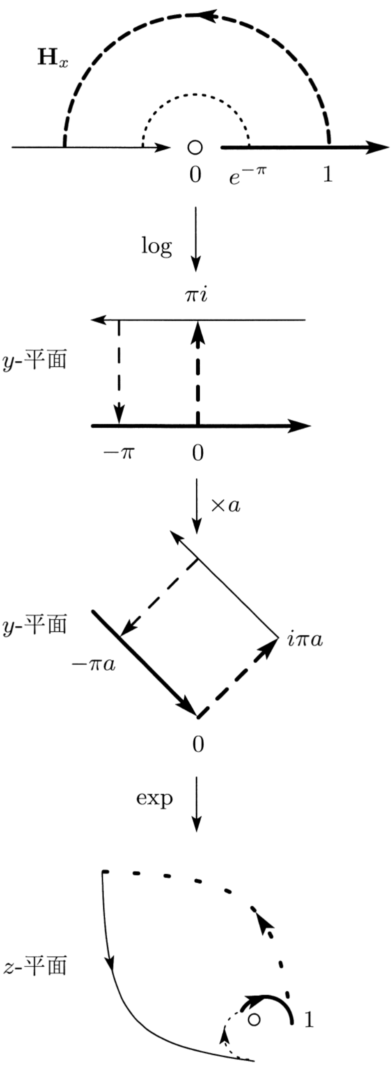


図 4　複素指数の冪関数.

で微分が消えるか何れか）がその他のどんな点でも等角だということになります；理屈ではそうなる筈ですが直感的には俄かには信じがたいでしょ．便座の場合でも，線分が円弧に，円弧が線分になるし，さざえのときは真直ぐな帯がぐるぐるの螺旋になるのに，各点で等角なのですから．

4.2.5 反省

冪関数 $z = x^a$ は a が実数，純虚数，それ以外で，上半分の行き先がこれ程違うまことに複雑な（x ($\neq 0$) の正則）関数であるが，a についても何処までも正則な関数なのである，不思議ではありませんか，このことを思う度に，私は未だ冪関数（2 変数正則関数）を十分理解していないなあと反省しています．

5. 発展学習

反省ばかりしていても仕方ないから，もう少し高級な微分方程式・関数の話をしましょう．冪関数や指数関数で解けてしまわない一番易しい方程式があります．

- 未知関数の個数は 1 個（0 個だと，することはないし，2 個以上だと難しいだろう），
- 線形（非線形より易しいことは自明），
- （微分の）階数は 2（階数が 1 なら冪関数・指数関数で解けてしまう），
- 特異点は一番易しい特異点が 3 個（2 個なら冪関数で解けてしまう）となります．

3 つの特異点を $0, 1, \infty$ に持って来れば，この方程式は

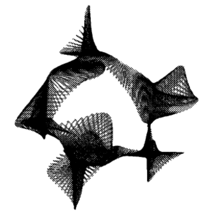
$$x(1-x)\frac{d^2u}{dx^2}+\{c-(a+b+1)x\}\frac{du}{dx}-abu=0$$

と，3 径数を用いて書けてしまいます．これは超幾何微分方程式と言われ，解は超幾何関数と呼ばれます．この関数は冪関数とよく似ており，色々なことが分かるけど，未だ分からないことも沢山あるので，私は 35 年ほどこの関数ばかりを調べています．

勿論世の中にはもっと高級な微分方程式・関数はありますが，よく分かる（将来よく分かる可能性がある）方程式・関数はそう無闇に沢山はないようです．

（よしだ・まさあき，九州大学大学院数理学研究院）

素数分布と函数論



本 橋　洋 一

数式を言葉とした精密思考は Sumer-Akkad 文明に始まり以来連綿と続いて来た．この間 5 千年，思考のより大きな自由を得るために数の認識は次第に拡げられ，漸くに 2 世紀ほど前に複素数が一般に用いられ始めた．この言葉を失うならば，我らの文明は消滅する．決して誇張ではない．

函数論は複素数による表現法の集積である．自然現象の多くは他に表現の手段を持たない．本論説にても，函数論を明確に用いる他無いのである．素数分布の結果や予想に限るならば，函数論を避けることは可能であるのかも知れない．しかし，それでは発見の筋道を全く欠くこととなり，実像に何ら触れずじまいの報道となる．Riemann 予想云々にしても函数論内部の機微の一つであり，函数論を用いずしてどうして表現できようか．

素数分布の研究に複素数が用いられ，しかもその上の微積分学つまり函数論が盛んに応用される．この事実に人々は奇妙さを感じるらしい．素数のごとく離散的なものを研究するに当たり連続的な函数，しかも複素変数の函数がなぜ用いられるのか．逆説的であるが，実は函数論あるがゆえに離散的なものを取り扱うことが出来るのである．つらつら思うに，全ては Cauchy の積分定理を経由し，積分表示式

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-w}dz \qquad (0)$$

に帰着する（下記の (14) を参照）．ここで子細な定義をする必要は無いであろう．函数 f の点 w における値ないしは状態を w に触れずに「観る」ことが出来るのである．函数 f が正則である範囲を逸脱せぬ限り，w を左手に見て一周する限り，積分路 C はどのようにでも自在にとれる．己が好む路を自由に歩むが良い．この融通無碍は複素数なくしてはあり得ない至福である．

しかし，なにゆえにゼータ函数 $\zeta(s)$ を主とせずに素数分布論を前面にして語るのか．それは正に Riemann の論文 [8] を念頭におくからである．素数のあつき血汐にふれも見でさびしからずやゼータを説くは．

数学の歴史上は思いのほか最近であるが，いまから 150 年前のことである．Chebyshev の論文 [1] を目にした Riemann は複素変数 $s = \sigma + it$（σ, t は実数）の函数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \sigma > 1 \qquad (1)$$

の採用に思い当たった．あるいはむしろ，Chebyshev が実数の s のみについて $\zeta(s)$ の議論をしていたことを Riemann は奇異に感じたのではなかろうか．勿論これは数学学習者に対して函数論の素養を当然視する現代の見方である．言うなれば，Riemann はそれほどに現代に直結した人である．いずれにせよ，Euler よりもはるかに深い意味で函数 $\zeta(s)$ を用いた最初の人が Chebyshev であることは確かである．彼は素数定理の直前にまで

到達していた．つまり，何らかの漸近展開が函数

$$\pi(x)=\sum_{p<x}1,\quad p:\text{素数} \tag{2}$$

について成立するとするならばそれはGauss予想（1792/3）の通りとなる，との結論を函数 $\zeta^{(\nu)}(s)$, $\log\zeta(s)$ の $s\to 1+0$ なるときの挙動から得ていたのである．Gauss予想とは函数 $\pi(x)$ の良い近似が対数積分

$$\mathrm{li}(x)=\int_2^x\frac{du}{\log u} \tag{3}$$

であろう，ということである．部分積分をしてみればわかるが，広く知られたLegendre予想（1798）

$$\pi(x)=(1+o(1))\frac{x}{\log x} \tag{4}$$

よりも明らかに深い．この研究がRiemannに強い動機を与えたのである．Chebyshevの出発点はEuler積表示

$$\zeta(s)=\prod_{p:\,\text{素数}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1},\quad \sigma>1 \tag{5}$$

であった．彼は，両辺の対数をとり

$$\log\zeta(s)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s\log n},\quad \sigma>1 \tag{6}$$

なる関係を把握していた（実数 s についてのみではあったが）．ここに，

$$\Lambda(n)=\begin{cases}\log p & n\text{ がある素数 }p\text{ の冪}\\ 0 & \text{そのほか}\end{cases} \tag{7}$$

である．ただし，この記号は後のvon Mangoldによるものである．素数分布については函数 $\pi(x)$ を直接に扱うのではなく，函数

$$\psi(x)=\sum_{n<x}\Lambda(n)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p<x^{1/m}}\log p \tag{8}$$

を経由することが望ましい，とされるが，この伝統もChebyshevに始まる．積分表示

$$\pi(x)=\int_2^x\frac{d\psi(u)}{\log u}+O(x^{1/2}) \tag{9}$$

に注意すれば良いであろう．積分はStieltjesの意味である．

Riemannの出発点は (6) であった．彼は (6) を複素変数 s について捉え，積分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(a)}\log\zeta(s)x^s\frac{ds}{s},\quad a>1 \tag{10}$$

を考察し，$\pi(x)$ を $\zeta(s)$ の零点についての和にて表すことに想到したのである．ここに (a) は垂直線 $\mathrm{Re}\,s=a$ である．積分路を左方向に移動する訳であるが，当然に $\log\zeta(s)$ の特異点が視野に入る．後に詳らかにするが，それらは $\zeta(s)$ の極か零点である．積分 (10) であるが，(6) より

$$\sum_{n<x}\frac{\Lambda(n)}{\log n}=\int_{2-0}^{x}\frac{d\psi(u)}{\log u}du \tag{11}$$

に等しい．ただし，$x>2$ は整数ではないとする．実際は，積分を $[a-iT,a+iT]$ に制限しその後 $T\to\infty$ とするものと (10) を解釈せねばならない．下記 (14) を再び参照せよ．いずれにせよ (9) により (10) は函数 $\pi(x)$ そのものにごく近い．函数論の視座を採らねば (10) は勿論全くの考慮の外である．ChebyshevとRiemannとを決定的に分けたものが函数論を採るか採らないかであったと知れる．

そこで，複素変数函数 $\zeta(s)$ の理論のごく始まりの部分を用いて「素数分布論における明示式」がどのように導かれるかを概説しよう．着想そのものとしてはRiemannの視界から未だに何ら離れていないのであるが，より函数論の適用にふさわしく (5) の対数微分

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s},\quad \sigma>1 \tag{12}$$

を用いることとする．実際，Riemannが (6) に固執したのは不思議である．一般に函数の対数は扱いが面倒である．函数 $\log\zeta(s)$ の定義は枝の採り方が複雑であり，往々にして致命的な間違いを引き起こす．慎重であれ．対数微分 (12) には枝分かれの不安は無い．RiemannにとってはChebyshevの影響が強かったのであろう．しかし，Chebyshevの名は [8] には無い．遺稿には在るのだが．Scripta manent!

先ず，x が整数ではないならば，

$$\begin{aligned}\psi(x) &= -\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-iT}^{a+iT}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)x^s\frac{ds}{s} \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{(a)}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)x^s\frac{ds}{s}.\end{aligned} \qquad (13)$$

後者は (10) と同じく略記である．これは，

$$\frac{1}{2\pi i}\lim_{T\to\infty}\int_{a-iT}^{a+iT}x^s\frac{ds}{s} = \begin{cases}1 & x>1,\\ \frac{1}{2} & x=1,\\ 0 & x<1\end{cases} \qquad (14)$$

を (12) に応用したものである．一方 (14) は (0) の単純な応用結果である．ここで重要な観察を行う．右辺は不連続函数である．しかるに，左辺の積分は極めて滑らかな函数である．各 T について右辺への近似となる．この近似は (0) ないしは Cauchy の積分定理によって自在に調整可能である．同様な不連続性積分が Fourier 級数に関する Dirichlet の考察に現れるが，(14) ははるかに自由度が高い．それはともかくとして，Riemann に従って (13) の積分路の左方向への移動を図る．この段階で $\zeta(s)$ の極と零点を知る必要が生じる．そのために Riemann は先ず函数等式を証明した．彼は Chebyshev [1] から積分表示式

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx, \quad \sigma>1 \quad (15)$$

を借用した．つまり，分母 $(e^x-1)^{-1}$ を e^{-x} の冪級数に展開し，項別に積分する訳であるが，絶対収束性により等式 (15) は正当化される．そして，いかにも Riemann とも言うべき積分の変形が行われる．つまり，

$$-2i\sin(\pi s)\,\Gamma(s)\zeta(s) = \int_{\mathcal{C}}\frac{(-x)^{s-1}}{e^x-1}dx. \quad (16)$$

積分路 $\mathcal{C}$ は実軸上にて $+\infty$ を発し，点 $\frac{1}{1859}$ に進み原点を中心として正方向に円を描き，再び実軸に沿って $+\infty$ に戻る．この間，$\arg(-x)$ は $-\pi$ から π に変化する．後に Gamma 函数論に現れた Hankel 路と同様である．積分 (16) は全ての複素数 s につき収束し，整函数である．つまり，複素平面全体への $\zeta(s)$ の一意的「解析接続」を得る．次に，条件 $\sigma<0$ を課す．積分路 $\mathcal{C}$ の円周部分を無限に拡大し，留数計算を実行するならば，

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{C}}\frac{(-x)^{s-1}}{e^x-1}dx \\ &= -4\pi i\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi s\right)\sum_{n=1}^\infty(2\pi n)^{s-1}\end{aligned} \qquad (17)$$

となり，函数等式

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s}\cos\left(\tfrac{1}{2}s\pi\right)\Gamma(s)\zeta(s) \quad (18)$$

$$= \pi^{\frac{1}{2}-s}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(1-s)\right)}\zeta(s) \quad (19)$$

が得られる．後者は Gamma 函数の倍角公式による．

この議論にて解析接続の概念が必要となるが，Riemann はごく当り前のこととして用いている．実は，函数論の健全な知識を欠く人々が理解に苦しむのは解析接続一般である．接続にて何が実際には起きているのかあるいは諒解されているのか理解せぬままにいることがしばしばである．そこで，そのような人々への大まかな処方箋であるが（勿論，函数論を学び直すのが最善であるが），一つの函数は様々な姿に見えると思うべし．例えば，超幾何函数 ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)$ には，微分方程式，冪級数，Gauss の積分，Mellin–Barnes 積分が知られている．これらのいづれも欠くことは出来ない．つまり，超幾何函数の本当の姿は一つの表示だけでは見えないのである．函数 $\zeta(s)$ の場合には，表現 (1), (5), (15), (16) があり，なおかつ

$$\zeta(s) = \int_{1-0}^\infty\frac{d[x]}{x^s} \quad (20)$$

$$= \frac{1}{s-1}+\frac{1}{2}-s\int_1^\infty\frac{\tau(x)}{x^{s+1}}dx \quad (21)$$

もある．ここに，$\tau(x)=x-[x]-\frac{1}{2}$ である．これらは全て $\zeta(s)$ の姿の一部分を示しているのである．例えば，(20) は (1) や (2) と同じく $\sigma>1$ なる領域での $\zeta(s)$ の姿であり，(21) は部分積分法を更に応用すれば明らかとなるが，領域 $\sigma>-1$ での見え方である．物体と同じく，見る角度によって函数は異なった姿をとる．それらを「接続」し全体として見る術を発見したのは Riemann であった．今日の函数論の教科書では局所的な Taylor 展開

をやはり局所的に接続しその全てをもって一つの複素変数函数が把握される．種から芽が出て函数と成る．Taylor 展開の係数は遺伝子である．しかし，それは理論展開には有利であるものの，実際上の応用にはそぐわない．超幾何函数の場合の 4 表示はそれぞれに相応しい場面にて効力を発揮するのである．勿論これらを揺るぎなく滑らかに繋げているものは局所的な接続の総体である．緊要なことは，良い表示を得ることである．特に良い積分表示は理論の大きな発展をもたらすことしばしばである．では，何をもって良い表示とするのか．それは一概には言えない．経験と幸運が大いに関係する．解析学全般の楽しみは正にそこにある．この文脈で言うならば，(16) は解析的には良い表示である．その理由は，鞍点法の援用を可能とする表示であるからである．実際，Riemann はこの鞍点法計算を実行し，$\zeta(s)$ の見事な近似式を樹立している．それにより，数値計算を行い，$\zeta(s)$ の零点を求め，Riemann 予想の源と思われる事実を得ている．但し公表はしなかった．現在この近似式は $\zeta(s)$ の電子的数値計算の手段である．

函数等式に戻り，

$$\xi(s)=\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}s\right)\zeta(s) \qquad (22)$$

とおく．Euler 積 (5) の絶対収束性から，$\zeta(s)$ は半平面 $\sigma>1$ にて零点をもたない．また，$\Gamma(s)$ は全く零点をもたぬゆえ，$\xi(s)$ は半平面 $\sigma>1$ にて正則であり且つ零点をもたない．一方，(19) は等式 $\xi(s)=\xi(1-s)$ と同義である．従って，$\xi(s)$ は

$$\text{臨界帯：}\quad 0\le\sigma\le 1 \qquad (23)$$

の外部で正則であり且つ零点をもたない．また，臨界帯においては，(21) を参照し $\xi(s)$ は正則であることも分かる．即ち，$\xi(s)$ は整函数であり，零点をもつとするならば，それは臨界帯内に限られ，しかもそれら全ては $\zeta(s)$ の零点でもある．逆に，臨界帯に入る $\zeta(s)$ の零点は全て $\xi(s)$ の零点である．函数 $\zeta(s)$ のこの他の零点は，ここに挙げた $\xi(s)$ の性質から，$\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)$ の半平面 $\sigma<0$ における極に一致する．即ち $\zeta(-2m)=0,\ m=1,2,\ldots$ これら全ては単根であり，$\zeta(s)$ の「自明な零点」と呼ばれる．他方，臨界帯に入る零点を「複素零点」と定義し，それらを一般的に

$$\rho=\beta+i\gamma \qquad (24)$$

と記すこととする．ここで $\gamma\neq 0$ であることを注意する．実際，$s>0$ について

$$(1-2^{1-s})\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}>0. \qquad (25)$$

さて，領域 $\sigma\ge\frac{1}{2},t\ge 2$ にては，表示 (21) より $\zeta(s)=O(|s|)$．よって Gamma 函数に関する Stirling 漸近公式を援用し，$\xi(s)=O(\exp(|s|\log|s|))$ となる．この評価は本質的に最良なものである．従って，「Hadamard の因数分解定理」により，絶対常数 a,b が存在し，

$$\xi(s)=e^{a+bs}\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{s/\rho} \qquad (26)$$

且つ

$$\sum_{\rho}\frac{1}{|\rho|}=+\infty \qquad (27)$$

を得る．次に，(22) 及び (26) の右辺の対数微分をとり，任意の複素数 s につき，

$$\begin{aligned}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)&=\frac{1}{2}\log\pi+b-\frac{1}{s-1}\\&-\frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\tfrac{1}{2}s+1\right)+\sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right).\end{aligned} \qquad (28)$$

勿論，極に一致する s についてはことわりが必要であるが省略する．複素零点の分布について重要な帰結をここから導く．このために，(28) にて $\sigma>1,t\ge 2$ とすると，ある絶対常数 $c>0$ が存在し，

$$-\mathrm{Re}\,\frac{\zeta'}{\zeta}(s)<c\log t-\sum_{\rho}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right). \qquad (29)$$

この無限和の各項は正であるゆえ，

$$-\mathrm{Re}\,\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it)<c\log t. \qquad (30)$$

また，t がある $\rho=\beta+i\gamma$ の虚部に一致している場合は，

$$-\mathrm{Re}\,\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+i\gamma)<c\log\gamma-\frac{1}{\sigma-\beta}. \qquad (31)$$

然るに，任意の実数 t について

$$
\begin{aligned}
&-3\mathrm{Re}\,\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma)-4\mathrm{Re}\,\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it)\\
&\quad-\mathrm{Re}\,\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+2it)\geq 0,\quad \sigma>1
\end{aligned}\tag{32}
$$

である．実際，(12) より左辺の展開の係数は $2\Lambda(n)n^{-\sigma}(1+\cos(t\log n))^2 \geq 0$．これら 3 不等式より

$$
\frac{4}{\sigma-\beta}<\frac{3}{\sigma-1}+c\log\gamma,\quad \sigma>1. \tag{33}
$$

つまり，

$$
\beta<1-(\sigma-1)\frac{1-c(\sigma-1)\log\gamma}{3+c(\sigma-1)\log\gamma}. \tag{34}
$$

充分小なる $\alpha>0$ を採り $\sigma=1+\alpha/\log\gamma$ とし，「非消滅領域」を得る：

定理 1　絶対常数 $c_1>0$ が存在し，

$$
\zeta(s)\neq 0,\ \ \sigma>1-\frac{c_1}{\log(|t|+2)},\ \ t\in\mathbb{R}. \tag{35}
$$

他方，(13) にて積分路を $-\infty$ に向けて移動する．つまり，(28) を積分し，比較的容易に「素数分布論における明示式」を得る：

定理 2　変数 x が整数ではないならば，

$$
\begin{aligned}
\psi(x)\,=\,&x-\lim_{T\to\infty}\sum_{\substack{\rho\\|\gamma|<T}}\frac{x^\rho}{\rho}\\
&-\log(2\pi)-\frac{1}{2}\log(1-x^{-2}).
\end{aligned}\tag{36}
$$

注意　実際は，$\sigma\leq 1$ について $(\zeta'/\zeta)(s)$ の評価が必要である．このことこそが Hadamard の理論にて成されたことであった．

上記の x についての条件は応用上は何らの制限も引き起こさない．また，x が整数であり素数の冪に一致しない場合にも (36) は成立する．変数 x が増大しつつ素数 p を通過するとき，(36) の左辺は不連続となり，$\log p$ なる跳躍をする．対するに，右辺にてはこの不連続性は複素零点が無限に存在しなければ起こりえない．自明な観察ではある．しかしながら，これを言い換えるならば，ただ 1 個の素数を検出するに当たって函数 $\zeta(s)$ はその無限個の複素零点を総動員せざるを得ない，と観ることも出来よう．つまり，(36) なる明示式は，複素零点全体の「統計的」事象の一滴である．統計的な観点にて明示式を見ることは Hoheisel（1930）に始まる．20 世紀における素数分布論の発展のほぼ全てはこの観点のもとに成されたのである．

定理 1 及び定理 2（正確には多少その前段階）を組み合わせ，「素数定理」を得る：

定理 3　絶対常数 $c>0$ が存在し，

$$
\pi(x)=\mathrm{li}(x)+O(x\exp(-c(\log x)^{1/2})). \tag{37}
$$

以上は函数論と素数分布論の関係の端緒である．Hadamard の整函数論の重要さが知れよう．しかし，恐らくは，素数分布への道はこれのみではない．存外，函数論のはるか先を行く道が将来発見されるかもしれない．その可能性を忘れてはならない．函数論は万能に過ぎるのであり，素数の問題に特に相応しいなどとは決して言えない．実際，素数分布論の様々な場面にて函数論は補助的な手段であり，現状では篩法が主となる．如何なる言語表現もしょせんは近似である．例えば，Riemann 予想すなわち「(24) にて常に $\beta=\frac{1}{2}$」なる主張は素数分布においては絶望的に粗い近似を与えるだけである．

文献案内

(a) 論文 [1] と [8] の題名は殆ど同じである．Chebyshev [1] の方針は Selberg 及び Erdős（1948 独立）による「素数定理の初等的証明」と似通うところがある．「初等的」とは「容易」とは全く異なり，函数論を用いないということである．なお，Chebyshev は記号 $\zeta(s)$ を用いてはいない．

(b) Legendre 予想 (4) つまり一般にいうところの素数定理の証明は Hadamard [2] と de la Vallée Poussin [11] によってなされた．共に Hadamard の整函数理論つまりは (28) の帰結である．

(c) de la Vallée Poussin の定理 1, 3 は [12] にて得られたが，Mertens（1898）の着想 (32) 無くしては困難であった．はなはだ機知に富む (32) は有名なものであるが，その算術性はごく最近に解明された．なお，整函数論を必須とする訳ではない．Borel–Carathéodory の定理に代表される凸性理論が実はより重要である．

(d) 定理 3 以上の事実を素数分布論について知るには

[7] が現在では最先端である．巻 II では保型形式のスペクトル理論を扱い，その応用として函数 $\zeta(s)$ や素数分布を更に考察する．

本論説の範疇を念頭に次の書籍を勧める．

(1) 函数論教科書としては数論での経験を背景とした [10].
(2) 解析的整数論，素数分布論，ゼータ函数論の初学者には [3][4].
(3) 総合的なゼータ函数の教科書としては [9].
(4) 先端的なゼータ函数理論については [6].
(5) 先端的な素数分布論の教科書としては [5][7].

参考文献

[1] P.L. Chebyshev. Sur la fonction qui détermine la totalité des nombres premiers inférieur à une limite donné. Mém. Acad. Sci. St. Petersburg, 6 (1848), 1–19.

[2] J. Hadamard. Sur la distribution de zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques. *Bull. Soc. Math. France*, **24** (1896), 199–220.

[3] E. Landau. *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*. B.G. Teubner, Leibzig und Berlin 1909.

[4] —. *Vorlesungen über Zahlentheorie*. S. Hirzel, Leibzig 1927.

[5] Y. Motohashi: *Sieve Methods and Prime Number Theory*. Tata Lect. Notes in Math., Phys., 72, Tata IFR, Bombay 1983.

[6] —: *Spectral Theory of the Riemann Zeta-Function*. Cambridge UP, Cambridge 1997（第 2 版準備中）.

[7] 本橋 洋一：『解析的整数論 I. 素数分布論』. 朝倉数学大系（2009 出版予定）.

[8] B. Riemann. Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe. Monatsber. König. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, a.d. Jahre 1859, 671–680 (1860).

[9] E.C. Titchmarsh. *The Theory of the Riemann Zeta-Function*. Clarendon Press, Oxford, 1951.

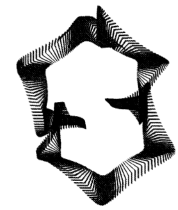
[10] —. *The Theory of Functions*. Oxford Univ. Press, Oxford 1968.

[11] C.-J. de la Vallée–Poussin. Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers. Premier Parte. La fonction $\zeta(s)$ de Riemann et les nombres premiers en général. *Ann. Soc. Sci. Bruxelles*, **20** (1896), 183–256.

[12] —. Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombres des nombres premiers inférieurs à une limite donnée. Mém. Courronnés et Autres Mém. Publ. Acad. Roy. Sci., des Letteres Beaux-Arts Belgique, 59 (1899/1900), Nr.1.

（もとはし・よういち，日本大学理工学部）

複素力学系入門



宍倉　光広

複素数の関数のうちで正則（あるいは解析的）と呼ばれる関数は，数々の美しい性質をもち，複素解析学あるいは函数論の研究対象になっている．この中には，指数関数・対数関数や三角関数を初め，楕円関数，ガンマ関数など数多くの古くから研究されている特殊関数を含み，より一般の正則関数や有理型関数とともに，広い研究の分野を形成している．本稿では，より簡単な正則関数である多項式や有理関数に焦点を当て，それらの反復合成をすることにより，言い換えれば，力学系として考えることにより，興味深い全く別の側面が現れてくることを見る．複素力学系は，1980 年代にサリヴァンやドゥアディ・ハバードにより研究が大きく進展し，それをさらに発展させた研究により，1994 年に J.-C. ヨコツが，1998 年には C.T. マクマレンがフィールズ賞を受賞している．これもこの分野の活発な研究を象徴するものと言えるだろう．

1. 漸化式から力学系へ

まず，最も簡単な例として，次の漸化式を考えてみよう．

$$z_{n+1} = z_n^2 + c. \qquad (1.1)$$

ここで，c は固定された複素数のパラメータとし，一つの複素数 z_0（初期値）を与えれば，帰納的に $z_1, z_2, z_3, \ldots$ が定まる．この複素数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ について何が言えるであろうか？

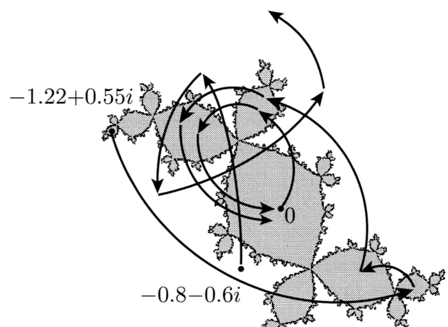


図 1　$c = -0.12 + 0.74i$ のときの軌道の例．背景は充填ジュリア集合 K_c（後述）．

例えば，$c = -0.12 + 0.74i$ と選び，初期値 z_0 をいろいろ変えて，$\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ の挙動を調べてみると（図 1）：$z_0 = 0$ のときはほぼ 3 周期的；$z_0 = -1.22 + 0.55i$ のとき最初は周期的ではないが，だんだん 3 周期に近づく；$z_0 = -0.8 - 0.6i$ のときは絶対値がどんどん大きくなる（無限大に発散する）；その他にも（少なくともしばらくの間は）周期的にも見えないし，無限大にも発散しない初期値を見つけることができる．

一般に，このパラメータ c に限らず，初期値 z_0 の取り方によって，$\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ は様々な挙動を取り得る．そこで，軌道の様子をおおざっぱに分類して不変集合を定義し，それを研究することにする．

まず，基礎となる定義から始めよう．$f(z)$ を変数が z，係数が複素数の多項式とする．次の形の漸化式を考える．

$$z_{n+1} = f(z_n). \tag{1.2}$$

上の漸化式 (1.1) は f が特に $P_c(z) = z^2 + c$ だった場合に相当する．z_n を z_0 で表そうとすると f の反復合成 (iteration) f^n を使って，$z_n = f^n(z_0)$ と書ける．ここで，f^n は $f^0 = id$（恒等写像），$f^n = f \circ f^{n-1}$ $(n = 1, 2, \dots)$ により定義される（べき乗の意味ではないことに注意）．このとき，$\{z_n\}_{n=0}^{\infty} = \{f^n(z_0)\}_{n=1}^{\infty}$ は z_0 を初期値とする軌道と呼ばれる．

f は複素平面からそれ自身への写像を定義し，反復の回数 n を時間と解釈すれば，(1.2) は時刻 n での何かのモデルの状態 z_n から，時刻 $n+1$ での状態 z_{n+1} を決定する方程式であると考えられる．このような時間発展の数学的モデルは**力学系**と呼ばれる．今我々が考えているのは，正則な複素関数（実際には多項式など）の力学系なので，**複素力学系**と呼ばれる．

2. 多項式の力学系

もし f が 1 次式であれば，高校でやるように (1.2) の一般項を求めてしまうことができ，あまり面白いことは起きないので，以後は多項式 f は 2 次以上であると仮定する．

$|z| \to \infty$ のとき，$|f(z)|/|z| \to \infty$ となることがわかるので，十分大きな $R = R_f > 0$ をとれば，

$$|z| \geq R \text{ ならば } |f(z)| \geq 2|z| \tag{2.1}$$

が成立する．実際，$f(z) = P_c(z) = z^2 + c$ のときは，$|f(z)| \geq |z|^2 - |c|$ に注意すれば，$R = 1 + \sqrt{1 + |c|}$ ととれることがわかる．さて，もし $|z_0| \geq R$ であれば，(2.1) を繰り返し適用することができて，$|z_n| \geq 2^n |z_0|$ となり，$|z_n| \to \infty$ $(n \to \infty)$ となる．z_0 自身が $|z_0| < R$ となる場合でも，ある m で $|z_m| \geq R$ となれば，やはり $n \geq m$ では $|z_n| \geq 2^{n-m}|z_m| \to \infty$ $(n \to \infty)$ となるので，次が成立する．

補題 2.1. $z_0 \in \mathbb{C}$ のとき，次のどちらか一方のみが成立する．

(a) すべての $n = 0, 1, 2, \dots$ について，$|z_n| \leq R$；

(b) $|z_n| \to \infty$ $(n \to \infty)$.

この分類により (a) に相当する初期値 $z = z_0$ の集合 K_f を**充填ジュリア集合**と呼ぶ．すなわち

$$\begin{aligned} K_f &= \{z \in \mathbb{C} : \text{軌道 } \{f^n(z)\}_{n=0}^{\infty} \text{が有界}\} \\ &= \{z_0 \in \mathbb{C} : \text{(1.2) で定義した } \{z_n\}_{n=0}^{\infty} \\ &\qquad \text{について } |z_n| \leq R \ (n = 0, 1, 2, \dots)\} \\ &= \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(\overline{D}_R). \end{aligned} \tag{2.2}$$

ただし，$\overline{D}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ で，$f^{-n}(\overline{D}_R)$ は f^n による $\overline{D}_R$ の逆像である．

さらに，K_f を内点 $int\,K_f$ と境界 $J_f = \partial K_f$ に分類する：z が $int\,K_f$ に属するのは，z のある近傍（例えば z 中心の小さな円板）が K_f に含まれるときである．また，$J_f = \partial K_f = K_f \setminus int\,K_f$ は**ジュリア集合**と呼ばれる（後で見るように，J_f は閉集合になるので，これが境界の定義と一致する）．また，ジュリア集合の補集合 $F_f = \mathbb{C} \setminus J_f$ は**ファトゥー集合**と呼ばれる．また，$f(z) = P_c(z) = z^2 + c$ ととったときは，簡単のため，K_f を K_c，J_f を J_c と記すことにする．

パラメータを $c = -0.12 + 0.74i$ ととったときの図が，図 1 の背景である．グレーの領域が $int\,K_c$，その境界の黒い点の集合が J_c であり，それらの和集合が K_c である．白い領域から出発した軌道は無限大に発散する．

これ以外のいくつかのパラメータをとったときのジュリア集合 J_c を図 2 に示す．注意すべきは，$int\,K_c$ は空集合になることも多く，例えば，$c = i$ などでは $int\,K_c = \emptyset$ で，$J_c = K_c$ となっている．

これらの図は白黒であるが，実際にジュリア集合や後述のマンデルブロート集合をコンピュータで描くときには，カラーを用いることが多く，その方がアルゴリズム的に簡単であると同時に，視覚的にも非常に美しい絵が得られる．**裏表紙裏**のカラーの図のうち上段のものがカラーで描いたジュリア集合である．これらの図を描くアルゴリズム

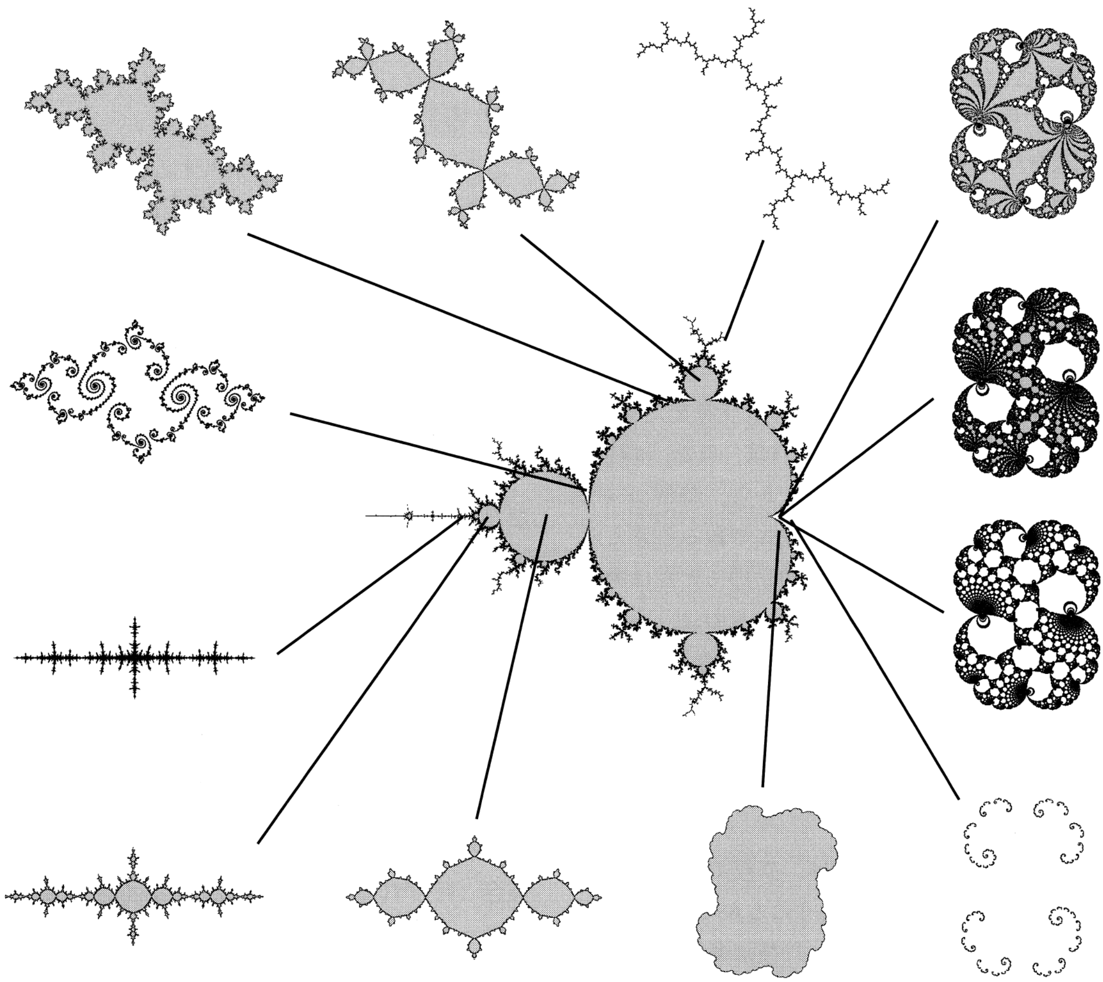


図 2　マンデルブロート集合（中央）と各種パラメータに対応するジュリア集合．内点はグレーで表示されている．

（半径 R の円から逃げ出す時間による色付け）は以下の通りである．(2.2) に基づき，R を十分大きく取り（例えば 10），また反復合成の最大回数 N も大きく設定し（例えば 200），図の各点（コンピュータの画面で言えば各ピクセル）に応じて初期値 z_0 をとり，$z_0, z_1, z_2, \ldots, z_N$ を計算し，$|z_n| \geq R$ となる最初の n に応じて点（ピクセル）に色付けをし（ここの図では青から緑，赤など色相を変化させている），ずっと $|z_n| < R$ の場合には黒く色を付けている．黒い点がほとんどない図もあるが，それは，各ピクセルは小さな矩形領域に相当するにも関わらず，代表として計算をする点が 1 個しかなく，この矩形領域に K_c の点があっても，それが黒く塗られるとは限らないからである．後に述べるように，実際には多数の色が集積している点にはジュリア集合の点があると思って差し支えない．

これらの図を見ても，ジュリア集合の多様性が見て取れると思う．ここで興味ある問題として，どのようなジュリア集合があり得るか，どのように分類したらよいか，ハウスドルフ次元や面積など量的な性質はどうか，また位相的に複雑に見えるがそれを記述する方法はあるか，そして，パラメータ c を変化させたときに，ジュリア集合がどのように変化するかなどの問題が挙げられる．

3. ジュリア集合・ファトゥー集合の性質

ここで，充填ジュリア集合 K_f，ジュリア集合 J_f などの基本的な性質を見てみよう．

補題 3.1. **(a)** K_f および J_f は閉集合である．$\mathbb{C}\setminus J_f$ および F_f は開集合である．
(b) これらの集合は次の意味で完全不変である：$f(J_f)=J_f=f^{-1}(J_f)$, $f(F_f)=F_f=f^{-1}(F_f)$ など．

実際，(a) で，$\mathbb{C}\setminus J_f$ が開集合になることは，$z_0\in\mathbb{C}\setminus J_f$ ならば，ある n について $z_n=f^n(z_0)\notin\overline{D}_R$（すなわち，$|z_n|>R$）であり，この n を固定すれば，f^n の連続性から z_0 に十分近い w_0 については，$w_n=f^n(w_0)\notin\overline{D}_R$ となることよりわかる．ここから他の集合についての主張が従う．また，(b) についても，定義から直接チェックすることが可能である．

補題 3.2 (各点の近傍での f^n の様子).
(a) $z_0\in\mathbb{C}\setminus K_f$ のとき，z_0 の小さな近傍では，$n\to\infty$ のとき，$|f^n(z)|$ は一様に無限大に発散する．
(b) $z_0\in int\,K_f$ のとき，z_0 のある近傍 U では，関数族 $\{f^n:n=0,1,2,\dots\}$ は**同程度連続**である．すなわち，任意の $\varepsilon>0$ に対し，$\delta>0$ が存在して，$z,w\in U$, $|z-w|<\delta$ ならば n によらず $|f^n(z)-f^n(w)|<\varepsilon$ となる．
(c) $z_0\in J_f$ のとき，z_0 のどんな小さな近傍 U をとっても，U の中に $\mathbb{C}\setminus K_f$ の点 w_0 が存在する．したがって，$|f^n(w_0)|\to\infty(n\to\infty)$ であるから，ある n で $|f^n(w_0)|\geq 2R$ となり，$|f^n(z_0)|\leq R$ より，$|f^n(z_0)-f^n(w_0)|\geq R$ となる．したがって，z_0 のどんな近傍でも，(b) の意味で同程度連続になり得ない．

この (a) は，補題 3.1 の証明から直ちに導かれる．また，(c) は，K_f の定義から従う．(b) を証明するには，$\{z:|z-z_0|\leq r\}$ が K_f に含まれるような $r>0$ をとるとき，f^n の微分に対するコーシーの積分公式

$$(f^n)'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=r}\frac{f^n(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^2}$$

を $|z-z_0|\leq r/2$ で適用すれば，そこでの $(f^n)'(z)$ の一様評価が出る（実際，$|\zeta-z_0|=r$ では一様に $|f^n(\zeta)|\leq R$ である）．

さらに，(c) において，$w_0\in\mathbb{C}\setminus K_f$ の点が $z_0\in J_f$ のいくらでも近くに存在するが，w_0 が z_0 に近ければ，f^n の連続性により，$f^n(w_0)$ が $\overline{D}_R$ から逃げ出すためにかかる時間は長くなることがわかる．したがって，前節のアルゴリズムに従ってカラーの図を描いたとき，ジュリア集合の点の近くには，（異なる逃げ出し時間に相当する）多数の色が集積することがわかる．

4. 周期点とジュリア集合・ファトゥー集合

ある自然数 n に対し，$f^n(z)=z$ となる点 z を f の**周期点**と言う．そしてこれを満たす最小の n を z の**周期**と言う．周期 1 の周期点は**不動点**とも呼ばれる．z が周期 n の周期点のとき，$\lambda=(f^n)'(z)$, を z の**乗数**（マルチプライヤー）と呼ぶ．さらにこの z について，$|\lambda|<1$ のとき **吸引的**（$|\lambda|=0$ なら**超吸引的**），$|\lambda|=1$ のとき **中立的**，$|\lambda|>1$ のとき z は**反発的**と呼ぶ．中立的な場合は λ が 1 のべき根かどうかによって**有理的中立**と**無理的中立**に分けられる．z_0 が周期 n の吸引的周期点の時，z_0 の近くから出発した軌道は z_0 の軌道に引き寄せられていくことがわかる．そこで

$$A(z_0)=\{z\in\mathbb{C}:\lim_{j\to\infty}f^{nj}(z)=z_0\}$$

は z_0 を含む開集合となる．これを z_0 の**吸引領域**と呼ぶ．

K_f の定義から直ちにわかるように，周期点はすべて K_f に含まれる．吸引的周期点については吸引領域も K_f（実際には $int\,K_f$）に含まれる．逆に $int\,K_f$ においては，補題 3.2 によればその近傍では $\{f^n\}$ が同程度連続でなければならないが，これは反発的周期点では起こり得ない，したがって，反発的周期点は J_f に属する．さらに次

の定理はジュリア集合のもう一つの特徴付けを与える．

定理 4.1 (ファトゥー)．

J_f は f の反発的周期点全体の閉包に一致する．

その他，有理的中立周期点に対しても吸引領域に類似の**放物領域**（ただし，周期点は放物領域の境界上にある）が存在し，有理的中立周期点自身は J_f に属することも示せる．一方，無理的中立周期点の場合には，$int\, K_f$ に属することも，J_f に属することもあり得る．前者の場合には，この周期点を含む領域で単位円板上の無理数回転 $z \mapsto e^{2\pi i\alpha}z$（ここで α は無理数）と同様の挙動をする（共役になる）．この領域は**ジーゲル円板**と呼ばれる．

5. サリヴァンの定理

複素力学系の理論は，複素数係数の次数 ≥ 2 の 1 変数有理関数

$$f(z) = \frac{a_d z^d + \cdots + a_1 z + a_0}{b_d z^d + \cdots + b_1 z + b_0} \qquad (5.1)$$

に拡張することができる．複素平面 $\mathbb{C}$ に無限遠点 ∞ を付け加えたリーマン球面 $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を考えると，立体射影により $\widehat{\mathbb{C}}$ は 2 次元球面と同相であることがわかる．有理関数 f は，$\widehat{\mathbb{C}}$ からそれ自身への正則写像を定義する．f が多項式でない場合は，充填ジュリア集合 K_f の定義は意味をもたなくなるので，ファトゥー集合 F_f の定義として，

$$F_f = \{z : \{f^n\}_{n=1}^{\infty} \text{ が } z \text{ の近傍で同程度連続}\}$$

を採用し，ジュリア集合を $J_f = \widehat{\mathbb{C}} \setminus F_f$ で定義する．ただし，同程度連続の定義では，ユークリッド距離ではなく，$\widehat{\mathbb{C}}$ を球面と同一視することによって得られる球面距離を使用する．もし，f が多項式ならば，付け加えた ∞ は超吸引的不動点となり，補題 3.2 (a) は $\widehat{\mathbb{C}} \setminus J_f$ で f^n が広義一様に ∞ に収束することを意味し，そこでは，$\{f^n\}_{n=1}^{\infty}$ はやはり同程度連続になる．したがって，多項式の場合に 2 つの定義は一致する．また，定理 4.1 も有理関数の場合に成立する．

ファトゥー集合 F_f は f-不変な開集合であったが，その連結成分を f のファトゥー成分と呼ぶ．ファトゥー成分は f によりまたファトゥー成分にうつされる．そこで，自然に出てくる問題としては，一つのファトゥー成分 U から出発して，その軌道 $U, f(U), f^2(U), \ldots, f^n(U), \ldots$ を考えるとき，これらはすべて相異なる（遊走的）か，あるいは，あるところからは（集合として）周期的になってしまうかということである．この問題を解決したのが，サリヴァンである．

定理 5.1 (非遊走定理)． 有理関数は遊走的ファトゥー成分をもたない．すなわち，ファトゥー成分の軌道はあるところから先は周期的になってしまう．

さらにサリヴァンは次を示した．

定理 5.2 (分類定理)． 周期的なファトゥー成分は次の 4 つのうちどれかである：

- **(a)** 吸引的周期点に軌道が収束する吸引領域；
- **(b)** 有理的中立周期点に軌道が収束する放物領域；
- **(c)** 円板 $\{|z| < 1\}$ 上の無理数回転 $z \mapsto e^{2\pi i\alpha}z$ $(\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ に共役になるジーゲル円板；
- **(d)** 円環 $\{r < |z| < R\}$ 上の無理数回転 $z \mapsto e^{2\pi i\alpha}z$ $(\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ に共役になるエルマン円環.

筆者はこれらの周期的なファトゥー成分の個数（周期的に移り合うサイクルを一つとして数える）について次の評価を得た．

定理 5.3. f を次数 $d \geq 2$ の有理関数とするとき，周期的なファトゥー成分のサイクルは高々 $2d-2$ 個である．ただし，各エルマン円環は 2 個と数える．またエルマン円環のサイクルは高々 $d-2$ 個である．またこの評価は最良である．

6. 2次多項式とマンデルブロート集合

この節では2次多項式 $P_c(z) = z^2 + c$ について考察する．ジュリア集合の連結性について次が知られている．

定理 6.1 (ファトゥー)． K_c (あるいは J_c) が連結 $\Longleftrightarrow 0 \in K_c \Longleftrightarrow \{P_c^n(0)\}_{n=0}^{\infty}$ が有界．

さらに，$0 \notin K_c$ のときは，$K_c = J_c$ ($int\, K_c = \emptyset$) で，J_c は**カントール集合**，すなわち，すべての連結成分が1点からなるような，孤立点をもたないコンパクト集合である．

この事実を見るためには，$z = 0$ が $P_c(z)$ の唯一の $\mathbb{C}$ 内の**臨界点** (微分が0になる点) であり，その像 $c = P_c(0)$ が唯一の臨界値であって，逆関数 P_c^{-1} が $\sqrt{z-c}$ (c で分岐した2価関数) になることに注意する．したがって，D が c を内部に含むジョルダン領域 (ジョルダン閉曲線で囲まれた領域) であれば，$P_c^{-1}(D)$ も唯一つのジョルダン領域になり，逆に，D が c を外部に含むジョルダン領域であれば，$P_c^{-1}(D)$ は2つの互いに交わらないジョルダン領域の和になる．$0 \in K_c$ のときには，$c \in P_c^{-n}(D_R)$ であるから，$D_R \supset P_c^{-1}(D_R) \supset \cdots \supset P_c^{-n}(D_R) \supset P_c^{-(n+1)}(D_R) \supset \ldots$ は帰納的にジョルダン領域 (したがって連結) であることが示され，$K_c = \cap_{n=0}^{\infty} P_c^{-n}(D_R)$ も連結になる．一方，$0 \notin K_c$ のとき，ある $m \geq 0$ について $c \notin P_c^{-m}(D_R)$ となるが，簡単のため $m = 0$ のときを考えると，$P_c^{-1}(D_R)$ は2つのジョルダン領域の和になる．それぞれについてさらに P_c による逆像を考えれば，$P_c^{-2}(D_R)$ は4つのジョルダン領域の和になることもわかる．これを繰り返すと，$P_c^{-n}(D_R)$ は 2^n 個の交わらないジョルダン領域の和になり，それぞれの成分の大きさが n とともに小さくなることも示せて，$K_c = \cap_{n=0}^{\infty} P_c^{-n}(D_R)$ はカントール集合になる．

パラメータ c の空間を J_c の連結性により分類して，**マンデルブロート集合**を定義する．

$$M = \{c \in \mathbb{C} : J_c \text{が連結}\}$$
$$= \{c \in \mathbb{C} : \{P_c^n(0)\}_{n=0}^{\infty} \text{が有界}\}.$$

図2の中央に描かれているのがマンデルブロート集合 M で，その内点はグレーで表示されている．

充填ジュリア集合 K_c の境界 $J_c = \partial K_c$ が重要であったのと同様に，マンデルブロート集合 M の境界 ∂M も力学系にとって重要な意味をもっている．

定理 6.2 (マネ・サド・サリヴァン)． $c \in \mathbb{C} \setminus \partial M \Longleftrightarrow c$ に十分近い c' をとると，J_c から $J_{c'}$ への同相写像で，f_c による軌道を $f_{c'}$ による軌道にうつすものが存在する (J-安定性)．

ジュリア集合 J_c やマンデルブロート集合 M の構造については，ドゥアディとハバードが精力的に研究を行い，数多くの結果が得られている．しかし，2次多項式に限ってもまだいくつかの未解決問題が残されている．最後にそれを1つだけ述べておこう．P_c が ($\mathbb{C}$ 内に) 吸引的周期点をもつとき，P_c は**双曲的**であると言う．双曲的な P_c は，力学系として非常によい性質をもち，J_c の位相的構造の記述など詳細な結果が得られている．これに関して次の予想がある．

予想． M の中で P_c が双曲的になるパラメータは稠密．

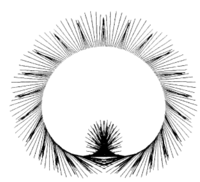
参考文献

1) A. Beardon, "Iteration of Rational Functions", Springer, 1991.
2) J. Milnor, "Dynamics in one complex variable. Third edition." Annals of Mathematics Studies, 160. Princeton University Press, 2006.
3) 上田哲生・谷口雅彦・諸澤俊介，『複素力学系序説』，培風館，1995年．

(ししくら・みつひろ，京都大学大学院理学研究科)

複素数と基礎物理

物理における複素数の役割



佐藤　光

1. 物理における複素数

複素数とは任意の実数 a, b と**虚数単位** i を用いて $\alpha = a + ib$ と表されるような数である．a を α の**実数部**，b を α の**虚数部**と言い，それぞれ $\mathrm{Re}\,\alpha, \mathrm{Im}\,\alpha$ で表す．また，実数でない複素数を**虚数**と言い，特に複素数 α の実数部，$\mathrm{Re}\,\alpha$ が 0 のとき，α を**純虚数**と言う[1,2]．実数は real number と呼ばれるように，実在するリアルな数であるのに対して，虚数は imaginary number という名前に表れているように，実在しない虚の世界の数と思われるかもしれない．しかし，実数も虚数も共に数としては同等であり，数の世界のみならず物理の世界をも大変豊かなものにしているのである．ここではいくつかの応用例を通して物理における複素数の役割について考察しよう．

物理的な観測量は言うまでもなくすべて実数である．ではなぜ物理の世界に虚数，あるいは複素数が必要なのだろうか．それには 2 つの理由がある．一つ目の理由は，力学や電磁気学などのいわゆる**古典物理**において複素数を用いる利点にある．ニュートンの力学法則やマクスウェルの電磁気法則のような古典物理の基本法則はすべて実数のみで表されている．したがって古典物理では原理的には複素数を導入する必要はない．しかし複素数を用いることによって様々な物理量の間の関係を見通しよく表したり，図示したりすることができるのである．

二つ目の理由は，**量子物理**における複素数の役割にある．量子力学の基礎方程式である**シュレーディンガー方程式**に虚数単位が含まれていることからも分かるように，量子力学に現れる諸量は一般的には複素数である．観測量は実数であるが，それを導く波動関数などの量子力学的諸量は複素数を使って表される．古典物理の場合と違って，量子物理は本質的に複素数の世界で構築されている．

2. 力学と複素数

複素数を用いることによって物理量の間の関係が見通しよくなり，問題の取扱いが簡単になる例として，平面上の質点の運動を考えよう．

質量 m の質点が力 $\boldsymbol{F}$ を受けて xy 平面上を運動しているとする．運動方程式は

$$m\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F} \tag{1}$$

である．これを複素数を使って表してみよう．

2 次元の位置ベクトル $\boldsymbol{r} = (x, y)$ を複素数 $z = x + iy$ で表し，力 $\boldsymbol{F} = (X, Y)$ を $Z = X + iY$ で表せば，運動方程式 (1) は

$$m\frac{d^2}{dt^2}z = Z \tag{2}$$

のように複素形式で表される．実際に，(1) 式を x, y 成分に分解したものと，(2) 式の実数部と虚数部とがそれぞれ対応していることは容易に確かめられる．(1) 式ではベクトルの各成分について

2つの方程式を扱わなければならないのに対して，(2) 式ではただ1つの複素数の方程式を扱えばよいという点で優れている．

具体例として，定点Oからの距離に比例する引力 $\boldsymbol{F}=-k\boldsymbol{r}$, $(k>0)$ を受けて運動する質点を考えよう．複素数表示の力は $Z=-kz$ と表されるから，運動方程式 (2) は

$$\frac{d^2z}{dt^2}=-\omega_0^2 z, \quad \omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{3}$$

となる．これはよく知られた単振動の方程式である．その一般解は

$$z(t)=C_1e^{i\omega_0 t}+C_2e^{-i\omega_0 t} \tag{4}$$

で与えられる．ここで C_1, C_2 は任意の複素数の積分定数である．A, B, δ, φ を実数として積分定数を

$$\begin{aligned} C_1&=\frac{1}{2}\left(Ae^{i\delta}+Be^{i\varphi}\right),\\ C_2&=\frac{1}{2}\left(Ae^{-i\delta}-Be^{-i\varphi}\right) \end{aligned} \tag{5}$$

とおけば，(4) 式は

$$z(t)=A\cos(\omega_0 t+\delta)+iB\sin(\omega_0 t+\varphi) \tag{6}$$

となる．(6) 式の実数部，虚数部がそれぞれ質点の2次元座標 $x(t), y(t)$ を与える．

次に複素数表示での質点の位置座標 $z(t)$ を**複素数平面**で表してみよう．$z(t)$ の表す点 $\mathrm{P}(x(t), y(t))$ の軌跡は図1に示すような楕円である．時刻 t における質点の，座標原点からの距離 $r(t)$ は $z(t)$ の**絶対値** $|z(t)|$ で与えられる．また，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が実数軸となす角 γ は $z(t)$ の**偏角**と呼ばれ，$\gamma=\arg z(t)$ と表す．

このように，2次元の質点の力学では複素数表示を使うことによって運動を x 方向，y 方向に分解することなく，見通しのよい定式化が可能となるのである．この他に2次元の流体運動についても複素数表示が有効であるが，ここでは割愛する．

3. 電磁気学と複素数

電磁気学で複素数が威力を発揮するのは交流理論においてである．交流では直流と違って電圧や電流の大きさだけではなく，位相も考えなければならない．そこで交流電流

$$j(t)=I_m\cos(\omega t+\theta) \tag{7}$$

を考えよう．I_m は電流の最大値，θ は $t=0$ における（**初期**）**位相**，ω は**角周波数**である．交流電流 $j(t)$ は以下のようにして複素数を用いて表すことができる．

まず，(7) 式は次のように表されることに注意しよう．

$$\begin{aligned} j(t)&=\mathrm{Re}\left(I_m e^{i(\omega t+\theta)}\right)\\ &=\mathrm{Re}\left(I_m e^{i\theta}e^{i\omega t}\right)=\mathrm{Re}\left(\dot{I}e^{i\omega t}\right). \end{aligned} \tag{8}$$

ここで，$\dot{I}=I_m e^{i\theta}=I_m(\cos\theta+i\sin\theta)$ を**複素電流**と呼ぶ．このように，ある交流量を複素数で表すとき，その量を表す記号の上に点を添えておく．$\dot{I}$ は図2に示すように複素数平面において長さが $|\dot{I}|=I_m$，偏角が θ のベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ で表される．複素数平面では交流は $t=0$ における $\dot{I}$

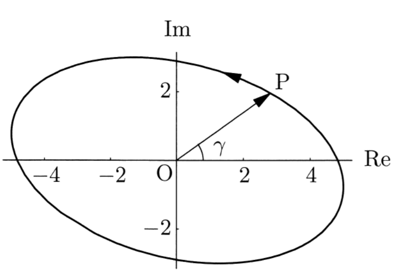


図1 複素数平面で表した質点の描く軌跡（$A=5, B=3, \delta=\pi/4, \varphi=\pi/6$）.

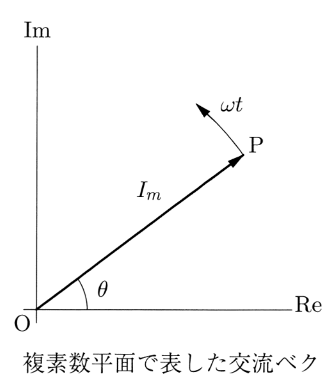


図2 複素数平面で表した交流ベクトル.

が時間とともに角速度 ω で正の向き（反時計回り）に回転していくベクトル $\dot{I}e^{i\omega t}$ で表される．(8) 式は，このベクトルの実数軸上への正射影が時刻 t における電流の大きさを与えることを意味している．

交流電圧についても同様にして**複素電圧**

$$\dot{V} = V_m e^{i\delta} \tag{9}$$

を考えることができる．時刻 t における電圧 $v(t)$ は次のように与えられる．

$$\begin{aligned} v(t) &= \mathrm{Re}\left(\dot{V}e^{i\omega t}\right) \\ &= V_m \cos(\omega t + \delta). \end{aligned} \tag{10}$$

ある回路に角周波数 ω の交流が流れているとき，その回路の 2 端子間の複素電圧 $\dot{V}$ と複素電流 $\dot{I}$ の比

$$\dot{Z} = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = \frac{V_m}{I_m} e^{i(\delta - \theta)} \tag{11}$$

を（複素）**インピーダンス**と言う．ここで $\delta > \theta$ のとき，電圧の位相は電流より $\delta - \theta$ だけ進んでいると言う．インピーダンスの実数部 $\mathrm{Re}\dot{Z}$ を**抵抗分**，虚数部 $\mathrm{Im}\dot{Z}$ を**リアクタンス**と言う．

ここでは図 3 のような，インダクタンス L，電気容量 C，電気抵抗 R，交流起電力 v を直列につないだ回路を考えよう．電流 j が時間変化するとインダクタンスには $-Ldj/dt$ の起電力が生じる．また，抵抗の両端には**オームの法則**により Rj だけの電位差が生じ，コンデンサーに電気量 Q がたまっているときの両端の電位差は Q/C であるから，

$$Rj + \frac{Q}{C} = -L\frac{dj}{dt} + v \tag{12}$$

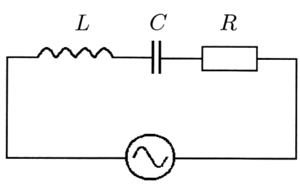


図 3　直列 LCR 回路．

が成り立つ．この式を時間でもう一度微分し，コンデンサーに流れ込む電流と電気量の関係，$dQ/dt = j$ を用いることにより，次の微分方程式を得る．

$$L\frac{d^2 j}{dt^2} + R\frac{dj}{dt} + \frac{1}{C}j = \frac{dv}{dt}. \tag{13}$$

この形の微分方程式は複素数表示を使って簡単に解くことができる．複素数表示での電流や電圧の時間変化は $e^{i\omega t}$ で与えられるから，これらを時間で微分することは $i\omega$ をかけることと同じである．したがって (13) 式の j や v に複素数表示を使うことにより，

$$\begin{aligned} &L\frac{d^2}{dt^2}\left(\dot{I}e^{i\omega t}\right) + R\frac{d}{dt}\left(\dot{I}e^{i\omega t}\right) \\ &\qquad + \frac{1}{C}\left(\dot{I}e^{i\omega t}\right) = \frac{d}{dt}\left(\dot{V}e^{i\omega t}\right). \end{aligned} \tag{14}$$

これより次の関係が得られる．

$$-\omega^2 L\dot{I} + i\omega R\dot{I} + \frac{1}{C}\dot{I} = i\omega\dot{V}. \tag{15}$$

この式から直列 LCR 回路のインピーダンス $\dot{Z}$ は次のように求められる．

$$\dot{Z} = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right). \tag{16}$$

また，$\dot{Z}$ の絶対値は

$$|\dot{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \tag{17}$$

となる．これより複素電流は

$$\begin{aligned} \dot{I} = \frac{\dot{V}}{\dot{Z}} &= \frac{R - i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\dot{V} \\ &= \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} e^{i(\delta - \varphi)} \end{aligned} \tag{18}$$

と求められる．ただし，φ は次の関係で決まる角度である．

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \\ \sin\varphi &= \frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \end{aligned} \tag{19}$$

こうして (10) 式で与えられた交流電圧 $v(t)$ が

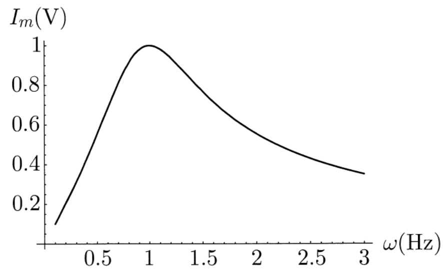


図 4　直列共振 ($V_m = 1(\mathrm{V})$, $R = 1(\Omega)$, $L = 1(\mathrm{H})$, $C = 1(\mathrm{F})$).

直列 LCR 回路に加えられたときに，回路に流れる電流 $j(t)$ は (18) 式より次のように得られる．

$$j(t) = \mathrm{Re}\left(\dot{I}e^{i\omega t}\right) = I_m \cos(\omega t + \delta - \varphi), \tag{20}$$

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \tag{21}$$

(20) 式から分かるように，回路を流れる電流の位相は加えた電圧の位相に対して，(19) 式で決まる位相 φ だけ遅れる．

(21) 式において，入力電圧の角周波数 ω を変化させたとき，回路に流れる電流の最大値 I_m はインピーダンスの絶対値が最小のときに最大となる．このときの周波数は**共振周波数**と呼ばれ，

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \tag{22}$$

で与えられる．入力角周波数 ω の変化に伴う I_m の変化の様子を図 4 に示す．このように I_m が急激に増減する現象を**共振**と言う．

交流理論に複素数を導入するメリットは，交流量に表れる大きさと位相という 2 つの量を一つの複素数で表すことにより，計算を見通しのよいものにすることができることである．実数表示のままで微分方程式 (13) を解くことにより (20), (21) 式の結果を導くことも可能である．しかし，両者を比較すれば，複素数表示がいかに有用であるかがわかるだろう．これは読者の課題としたい．

4. 量子力学と複素数

量子力学は原子・分子あるいはそれより微細な物質の構造を記述するための物理法則の体系である．それは次の基本原理に基づいている[3)]．

1. 微細な構造の物質や粒子の示す現象は根本的に確率的である．
2. 確率には一般に干渉効果が現れ，粒子は同時に波としての性質をもっている．
3. 確率は，**確率振幅**あるいは**波動関数**と呼ばれる複素関数 ψ によって表される．具体的には，時刻 t に空間の点 (x, y, z) の近傍 dV に粒子を見出す確率は $|\psi(x, y, z, t)|^2 dV$ に比例するものとして定義される．ここで $|\psi(x, y, z, t)|^2$ は**確率密度**と呼ばれる．
4. 粒子に付随したいろいろな物理量，例えば，エネルギー，運動量，角運動量などは，波動関数に作用する演算子として表される．

波動関数に対する因果的な時間経過はシュレーディンガー方程式と呼ばれる，次の方程式によって決定される．

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi. \tag{23}$$

$\hbar$ は**プランク定数**，H は**ハミルトニアン**と呼ばれる演算子である．量子力学の基礎方程式であるシュレーディンガー方程式 (23) に虚数単位 i が現れていることに注目してほしい．このことから，シュレーディンガー方程式の解である波動関数 ψ は実数関数ではあり得ないことが導かれる．

これを示すために，波動関数 ψ の実数部，虚数部をそれぞれ u, v とすれば，

$$\psi = u + iv. \tag{24}$$

(24) 式を (23) 式に代入して，実数部と虚数部に分けることにより次の関係式が得られる．

$$\frac{\partial}{\partial t}u = \frac{1}{\hbar}Hv, \quad \frac{\partial}{\partial t}v = -\frac{1}{\hbar}Hu. \tag{25}$$

ここでハミルトニアン H には虚数単位 i が含まれないものとした．ポテンシャル中の粒子の運動などはこの場合に当てはまる．

もし ψ が実数関数であるとすると，$v = 0$ であるから，(25) 式により $\partial u/\partial t = 0$ となる．すな

わち波動関数 $\psi = u$ は時間に依存しない．このような波動関数は量子力学的運動の時間経過を記述することができないから無意味である．かくして ψ は実数関数ではあり得ない．

力学や電磁気学では計算の便宜を図るために複素数が導入されたが，量子力学は複素数なしで語ることはできない．波動関数 ψ は複素数値をとる関数であるから，一般に次の形で表される．

$$\psi(x,y,z,t) = \varphi(x,y,z,t)e^{i\alpha(x,y,z,t)}. \tag{26}$$

ここで，$e^{i\alpha}$ は**位相因子**と呼ばれる．粒子を見出す確率は $|\psi(x,y,z,t)|^2$ に比例するから，位相因子はこれには影響しない．以下では位相因子が重要な役割を果たす例として，定常的な磁場中を運動する電子の波動関数について考察しよう．

電磁気学でよく知られているように，定常的な磁場は磁束密度 $\boldsymbol{B}(x,y,z)$ によって表され，これはまた**ベクトルポテンシャル**と呼ばれる量 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ によって

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{27}$$

と表される．ここで，∇ は微分演算を成分とするベクトルで，**ナブラ**と呼ばれる：

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right). \tag{28}$$

(27) 式は 2 つのベクトル，∇ と $\boldsymbol{A}$ のベクトル積で，$\boldsymbol{A}$ の**回転**と呼ばれ，$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ とも表される[1,2]．

ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ で表される定常的な磁場中の電子の運動を記述するシュレーディンガー方程式は次のように与えられる．

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla + e\boldsymbol{A}\right)^2\psi. \tag{29}$$

シュレーディンガー方程式の中では電子の運動に対する磁場の影響は $\boldsymbol{B}$ ではなく，ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ によって表されることが重要である．

シュレーディンガー方程式 (29) を満たす波動関数 ψ が

$$\psi(x,y,z,t) = \psi_0(x,y,z,t)e^{iS(x,y,z)/\hbar} \tag{30}$$

という形に書けると仮定し，これを (29) 式に代入して未知関数 ψ_0 と S の満たすべき方程式を導く．そのためにまず，次の関係式

$$\nabla e^{iS/\hbar} = \frac{i}{\hbar}e^{iS/\hbar}\nabla S + e^{iS/\hbar}\nabla \tag{31}$$

に着目する．更に

$$D = \nabla + i\frac{e}{\hbar}\boldsymbol{A} \tag{32}$$

とおけば，次の関係式が成り立つ．

$$D^2\, e^{iS/\hbar} = e^{iS/\hbar}\left(D + \frac{i}{\hbar}\nabla S\right)^2. \tag{33}$$

(29), (30) 式に (33) 式を用いることにより，

$$i\hbar\frac{\partial\psi_0}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla + \frac{i}{\hbar}(e\boldsymbol{A} + \nabla S)\right)^2\psi_0 \tag{34}$$

を得る．

そこで未知関数 $S(x,y,z)$ を

$$\nabla S = -e\boldsymbol{A} \tag{35}$$

を満たすように決めれば，(34) 式は自由粒子に対するシュレーディンガー方程式に帰着し，未知関数 ψ_0 は自由粒子の波動関数として解くことができる．また，(35) 式は関数 S の**勾配**（gradient）を与える式であるから，S は点 P_0 から $\mathrm{P}(x,y,z)$ までの線積分

$$S(x,y,z) = -e\int_{\mathrm{P}_0}^{\mathrm{P}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s} \tag{36}$$

によって与えられる．

以上によりシュレーディンガー方程式 (29) を満たす波動関数は，ψ_0 を自由粒子の波動関数として

$$\psi = \psi_0 \exp\left(-i\frac{e}{\hbar}\int_{\mathrm{P}_0}^{\mathrm{P}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s}\right) \tag{37}$$

となることが分かった．ここに見られるように，磁場の影響は波動関数の位相因子として表される．ベクトルポテンシャルの空間分布が，そこを通過した電子の波動関数の位相に反映されるのである．

波動関数の位相因子の効果は干渉実験によって調べることができる．電子波を 2 つに分けて，それぞれ別の経路を通った後に再び重ね合わせると干渉効果が生じる．2 つに分けられた電子波の波動関数をそれぞれ

$$\psi_1 = \psi_{01} e^{iS_1/\hbar}, \quad \psi_2 = \psi_{02} e^{iS_2/\hbar} \tag{38}$$

とすれば，重ね合わされた電子波の確率密度は

$$|\psi_1 + \psi_2|^2 = |\psi_{01}|^2 + |\psi_{02}|^2 + 2\mathrm{Re}\left(\psi_{01}\psi_{02}^* e^{i(S_1 - S_2)/\hbar}\right) \tag{39}$$

となって右辺第3項に干渉項が現れ，干渉縞が観測されるはずである．これを調べる巧妙な実験がアハラノフ（Y. Aharonov）とボーム（D. Bohm）によって提案された[4)]．

図5の実験概念図にあるように，電子源を出た電子波がコイルの両側の経路を通った後に重ね合わされると干渉縞ができる．コイルに電流を流すと両端がN極とS極の電磁石になり，磁場が発生する．コイルの長さを無限に長くすると磁極は無限遠方に行ってしまうので，磁場はコイルの内部だけに存在するようになる．

コイルの周りを通過した2つの電子波の位相差は，(36) 式から

$$(S_1 - S_2)/\hbar = -\frac{e}{\hbar}\oint_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s} \tag{40}$$

となる．ここで積分路 C は図5に示した電子波の通過する2つの経路をつなぎ合わせて，磁場の向きに関して右ネジ回りに一周する閉曲線である．(40) 式の積分に**ストークスの定理**[1,2)]

$$\oint_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{41}$$

を適用する．S は閉曲線 C を周囲とする曲面であるが，今の場合，磁束密度 $\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ はコイルの内部でしか存在しないから，実質上はコイルの断面に関する面積分となる．結局，重ね合わされる電子波の位相差は次のように与えられる．

$$(S_1 - S_2)/\hbar = -\frac{e}{\hbar}\int_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S}. \tag{42}$$

コイルに流す電流を変化させれば磁束密度 $\boldsymbol{B}$ が変化し，(42) 式に従って位相差が変化する．これは干渉縞のずれを引き起こすはずである．これを**アハラノフ–ボーム効果**と言う．この効果を確かめるための見事な実験が外村（A. Tonomura）たちによって行われ，予想されたとおりの干渉縞のずれが観測されたのである[4)]．

この実験は，コイルの外側で磁場が存在しないような空間でもベクトルポテンシャルは存在し，それが電子の波動関数の位相因子に影響して観測可能な効果を生じることを示した．言い換えれば，波動関数が複素数であることを直接的に実験で示したものとも言えよう．

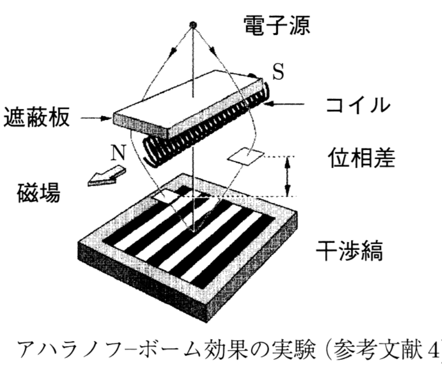


図5　アハラノフ–ボーム効果の実験（参考文献4）より転載）．

5. おわりに

実験で観測される物理量はすべて実数であるにも関わらず，数の世界を複素数にまで拡げることによって，物理の論理がよく見通せるようになる例を考察した．特に量子力学は本質的に複素数の世界で構築されており，実験的にもそれが検証されている．磁場のみならず一般に電磁場は波動関数の位相因子と密接に関係していて，このことは場の量子論において**ゲージ理論**として大きく花開くのである．複素数の奥深い魅力は数学自身の魅力であると同時に，物理の魅力の源泉とも深く関わっている．

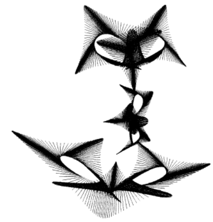
参考文献

1) 佐藤　光：『新版 物理数学ノート』（サイエンス社）．
2) 薩摩順吉：『物理の数学』（基礎物理シリーズ10，岩波書店）．
3) 江沢　洋：『量子力学I，II』（裳華房）．
4) 中村孔一，他編：『だれが量子場をみたか』（日本評論社）．

（さとう・ひかる，兵庫教育大学名誉教授）

複素数と現代物理

自然は複素数を必要としているのか



加藤　晃史

La matematica è l'alfabeto nel quale Dio ha scritto l'universo. (Galileo Galilei, 1564–1642)

1. はじめに

「宇宙は数学の言葉で書かれている」と言ったガリレオの時代，複素数はまだ正式の数として認知されていなかった．だとすれば，宇宙が複素数を使って記述されていたとしても，当時の人々には解読できなかったであろう．実数だけで物事を見ていたときには見過ごされていたものとは何だろうか？ 宇宙＝自然は本当に複素数を必要としているのだろうか？

2. 重ね合わせの原理と複素数

解析力学において，複素数を使わずには理解できない現象というものはすぐには思いつかない．Newton, Leibniz 以来，力学法則は実数の世界で話が閉じていたと言えるだろう．

複素数が本質的に必要とされる最初の場所は，代数方程式の根，特に**線型変換の固有値**としてであろう．例えば，回転を表す行列

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

は，成分がすべて実数だが，その固有値は $e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$ という複素数である．このため実数の範囲では R_θ は対角化不可能だが，複素数の範囲では対角化可能となる．このように，「簡単のため」複素数で考えるというのは，電磁気や熱伝導など線型性＝重ね合わせの原理が成り立つ分野で広く行われる．例えば真空中の Maxwell 方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}$$

を考えよう．平面波解を表す便法として，複素数の振幅ベクトル $\boldsymbol{E}_0$ を用いて $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega(x-t)}$ とおき，「実際の解はその実数部分をとる」というものがある．$\boldsymbol{E}_0$ として実ベクトルをとれば普通の直線偏光（横波）だが，進行方向に垂直な 2 次元平面の回転 R_θ に関する固有値 $e^{\pm i\theta}$ の複素固有ベクトルをとれば左右の円偏光を表すことができる．Fourier 変換等も，たとえ扱われる関数は実数であっても，複素数を使って変換を定義すると何かと便利である．

複素数は確かに便利ではあるが，以上のような使われ方だけなら平面 $\mathbb{R}^2$ を複素平面 $\mathbb{C}$ で代用しているだけで，存在理由としてはやや弱い．自然そのものが対角化を，固有値としての複素数を，必要としている兆候は他にないだろうか？

3. 素粒子論と複素数

素粒子とは何であろうか？ 一つの解答は，

素粒子 = 対称性に関する**既約表現**

というものである．実際，素粒子が持つべき性質

- 素粒子はこれ以上分解できない．
- 任意のものは素粒子に分解できる．
- 素粒子は分類可能（同じか否かを判定できる）．
- 固有の量（質量・スピン・...）で特徴づけられる．

は，既約表現が持つべき性質に他ならない．ただし，我々が何を「対称性」と思うかは，時代の関数であり，それが素粒子論の進歩のバロメータであるとも言える．

時空の対称性はローレンツ群

$$SO(3,1)=\{A \mid {}^tA\eta A=\eta\},\quad \eta=\begin{pmatrix}-1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

と平行移動の群 $\mathbb{R}^4$ との半直積であるポアンカレ群 $\mathcal{P}=SO(3,1)\ltimes\mathbb{R}^4$ で記述される．従って，素粒子は少なくとも $\mathcal{P}$ の既約表現でなければならない[*1]．

平行移動 $\mathbb{R}^4$ の生成元を $\frac{\partial}{\partial x_i}$ $(i=0,1,2,3)$ と書くとき，$\mathcal{P}$ 不変な D'Alembert 作用素

$$\Box=-\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \qquad (1)$$

に注目する．これは $\mathcal{P}$ の Casimir 元なので，既約表現に対しスカラー倍で作用する．その固有値を m^2 $(m\geq 0)$ と表すとき，m をその既約表現＝素粒子の質量（mass）と呼ぶ．有質量 $m>0$ の素粒子は，それが静止している慣性系での空間回転 $SO(3)$ に対する Casimir 作用素

$$C=\sum_{i=1}^{3}(J^i)^2,\quad J^i=\sum_{j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}x_j\frac{\partial}{\partial x_k}$$

の固有値 $j(j+1)$ $(j\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 2})$ を用いて，固有角運動量（スピン）j が定義される．零質量の素粒子の場合はその静止系は存在しないが，円偏光のときと同様，進行方向に垂直な面内の回転 $SO(2)$ に対する固有値で helicity を定める．

質量やスピンのように「時空の対称性」のどのような既約表現に属するかを表す量を「**外部量子数**」と言う．これ以外に，ゲージ変換のような対称性に関する既約表現を区別するものとして「**内部量子数**」がある．

対角化を用いずに表現論を展開することが不可能であるのと同様に，量子数を対角化せずに素粒子論を展開することは不可能である．対称性は実リー群で表せても，既約表現の固有値・固有ベクトルを通じて複素数が現れ，これらは相互作用による状態遷移を通じて実際に観測にかかるのである．

例えばスピンが j の荷電粒子を磁場中に置くと Zeemann 効果でエネルギー準位が $2j+1$ 個に分裂し，既約表現の weight 分解の様子を実際に測定できる．また，光子のときは固有値 $e^{\pm i\theta}$ に対応する左右の円偏光がともに存在したが，ニュートリノはすべて左巻きであり，右巻きのニュートリノは存在しない．

どうやら，自然は i と $-i$ をはっきり区別しているようである．

4. 複素構造

複素数全体 $\mathbb{C}$ は実線型空間としては $\mathbb{R}^2$ と同一視できる．従って，$\mathbb{C}$ は 2 次元実ベクトル空間の特別なものと思える．何が特別かというと，i 倍するという操作が意味を持つことである．

一般に，$2n$ 次元実ベクトル空間 V に線型変換

$$J:V\to V,\quad J^2=-\mathrm{id}_V$$

が与えられれば，これで i 倍を「定義」することができ，V は n 次元複素線型空間としての構造を持たせることができる．J をその**複素構造**と言う．ここで注意したいのは，J はあらかじめ決まっているのではなく，外から自由に手で入れてよいという考え方である．

物理に登場する $2n$ 次元実ベクトル空間 V には，**ユークリッド内積** $(\ ,\ ):V\times V\to\mathbb{R}$ や**シンプレクティック (symplectic) 形式** $[\ ,\ ]:V\times V\to\mathbb{R}$ と

*1) 素粒子であるという性質は，時空のどこでも不変であるべきだから．とはいえ，素粒子の定義が「入れ物」である時空の一様・等方性と不可分であるというのも考えてみれば不思議なことである．

いった双線型形式で定義される構造が入るのが普通で，複素構造が自然に現れることはあまりない．

実は，V にユークリッド内積とシンプレクティック形式がうまく共存するとき，複素構造も自然に定まる．実際，$[\ ,\ ]$ に関する symplectic 基底 $[\alpha_i, \alpha_j] = [\beta_i, \beta_j] = 0$, $[\alpha_i, \beta_j] = \delta_{ij}$ が同時に $(\ ,\ )$ に関して正規直交基底 $(\alpha_i, \alpha_j) = (\beta_i, \beta_j) = \delta_{ij}$, $(\alpha_i, \beta_j) = 0$ であったとすると，この基底に関して

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

という表示を持つ線型変換 $J : V \to V$ は，

$$[u, v] = (J(u), v), \quad (J(u), J(v)) = (u, v)$$

という意味で両立条件を満たす複素構造を定める．さらに，J を用いて V を n 次元複素線型空間と見なすとき，$(u, v) + i[u, v]$ は V 上のエルミート計量になっている．

両立する複素構造・ユークリッド構造・シンプレクティック構造は，そのうちの 2 つを決めると残りの構造も一意的に定まる三位一体の関係にある．つまり

$$\begin{aligned} O(2n) \cap Sp(2n) &= Sp(2n) \cap GL(n, \mathbb{C}) \\ &= GL(n, \mathbb{C}) \cap O(2n) \end{aligned}$$

が成立し，共通部分はちょうどユニタリ群 $U(n)$ である．

弦理論のミラー対称性は，多様体の複素構造やシンプレクティック構造を，弦理論が決めるユークリッド構造と関連させて調べる研究であると思えば，上記三位一体説の壮大な拡張と見なすことができる．現代物理学は，このような意味でも複素数を欲しているようである．

5. Lagrange 力学 vs. Hamilton 力学

Newton の運動方程式はなぜ 2 階の微分方程式で，速度，加速度は現れるのに，加加速度，加加加速度，$\cdots$，加^{n}速度，$\cdots$ は現れないのか？ というのは私が昔から抱いている疑問である．

このことは，$\mathbb{C}$ が $\mathbb{R}$ 上なぜ 2 次元か――実数にすべての 2 次方程式の根を付け加えるだけで十分で，3 次，4 次と方程式の次数を上げるたびに新しい数を導入しなくてもよい――ということと関連しているように思えてならない．

Newton の運動方程式が 2 階であることに相当して，Lagrange 力学では，接空間 TM（位置 x と速度 v を座標とする多様体）上定義された **Lagrangian** $L : TM \to \mathbb{R}$, $(x, v) \mapsto L(x, v)$ をすべての出発点とする．M 内の曲線 $\gamma : \mathbb{R} \to M$ に対し，その TM への持ち上げ $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \to TM$, $t \mapsto (\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$ を考え，L を $\tilde{\gamma}$ で引き戻して作用汎関数

$$S[\gamma] = \int L(\tilde{\gamma}(t))dt$$

を定義する．Lagrange の変分原理とは

$$\boxed{\text{運動方程式の解（古典解）}} = \boxed{S \text{ の停留点}}$$

という力学法則の定式化である．

これに対し，Hamilton 力学では，位置 x と運動量 p を座標とする相空間 T^*M 上の **Hamiltonian** $H : T^*M \to \mathbb{R}$, $(x, p) \mapsto H(x, p)$ を考える．H は T^*M 上の Hamiltonian 流 X_H を定める．それを 1 自由度系 $M = \mathbb{R}$, $T^*M \simeq \mathbb{R}^2$ で具体的に書けば，

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} \tag{2}$$

となり，Hamilton 流は勾配流 grad H を「90° 回転」して得られる流れである．一般の場合は 90° 回転という表現は意味をなさないが，T^*M 上の symplectic 形式 ω を用いて，任意の M 上のベクトル場 Y に対し $\omega(X_H, Y) = \langle dH, Y \rangle$ が成り立つようなものとして X_H が定義される．

Lagrangian $L : TM \to \mathbb{R}$ も，Hamiltonian $H : T^*M \to \mathbb{R}$ も，$x \in M$ を止めた各 fiber に制限すれば凸関数であり，それらはお互いに fiber ごとの **Legendre 変換**

$$\begin{cases} H(x,p) = \max_v(\langle p,v\rangle - L(x,v)), \\ L(x,v) = \max_p(\langle p,v\rangle - H(x,p)) \end{cases} \quad (3)$$

で結びつき，また古典解どうし $\tilde{\gamma}:\mathbb{R}\to TM$ と $\bar{\gamma}:\mathbb{R}\to T^*M$ も max を実現する点として対応している．例えば，1 自由度の Newton 力学では

$$\begin{cases} L(x,v) = \dfrac{mv^2}{2} - U(x), \\ H(x,p) = \dfrac{p^2}{2m} + U(x) \end{cases} \quad (p = mv) \quad (4)$$

といった具合である．

このように，Lagrange 力学と Hamilton 力学はお互いを決める関係にあり，等価な理論であるが，その定式化は見かけ上大変異なる．Hamiltonian H は保存されるエネルギーという意味を持ち，解軌道に沿って定数である．Lagrangian L にはそのような意味はなく，古典的には作用積分 $S[\gamma]=\int L(\tilde{\gamma}(t))dt$ が停留するかどうかのみが問われ，値は特に意味を持たない．ところが，量子論に移行すると，その状況は一変する．

Feynman は，『量子化とはすべての経路の重み付き重ね合わせ（**経路積分**）

$$Z_{\mathrm{qu}} = \int e^{\frac{i}{\hbar}S[\gamma]}\mathcal{D}\gamma = \int e^{\frac{i}{\hbar}\int L(\tilde{\gamma}(t))dt}\mathcal{D}\gamma \quad (5)$$

を考えることである』と喝破した．Planck 定数 $\hbar$ が S に比べて非常に小さいとすると，被積分関数 $e^{\frac{i}{\hbar}S[\gamma]}$ の偏角は，$dS[\gamma]\neq 0$ となる経路 γ の周りでは激しく変動して打ち消し合うが，$dS[\gamma]=0$ となる経路（＝古典解）の周りでは相殺が起こらず積分 Z_{qu} に寄与する．こうして量子力学の対応原理『$\hbar\to 0$ の極限で古典的力学法則を復元する』も自然に説明される．

もちろん，経路積分が (5) 式で厳密に定式化されたわけではない．$S[\gamma]$ も $\hbar$ も実数なので，被積分関数の絶対値が至る所 1 であり，どう考えても積分は収束しない．また，$\mathcal{D}\gamma$ の定義も謎である．ただ，Feynman 自身は経路積分を数学的に厳密に定義するということには関心がなく，波動光学の Huygens の原理の自然な拡張として自分の定式化に絶対の自信を持っていたようである．その点で，彼は発散級数を自在に扱った Euler に近いのかも知れない．

場の理論は統計力学と非常に近い数学的構造をしている．統計力学の**分配関数**は

$$Z_{\mathrm{stat}} = \mathrm{tr}_V\, e^{-\beta\hat{H}} \quad (6)$$

で定義される．ただし，V は物理的状態を表す Hilbert 空間，$\hat{H}:V\to V$ は Hamiltonian 演算子，$\beta=1/kT$ は逆温度である．$\hat{H}$ のスペクトルを $E_0\le E_1\le E_2\le\cdots$ とするとき，(6) は状態和

$$Z_{\mathrm{stat}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n} \quad (7)$$

に他ならない．このトレースは，形式的には周期 β の閉じた経路 $\bar{\gamma}:\mathbb{R}/\beta\mathbb{Z}\to T^*M$ にわたる経路積分と等価であり，

$$Z_{\mathrm{stat}} = \int e^{-\int_0^\beta H(\bar{\gamma}(\tau))d\tau}\mathcal{D}\bar{\gamma} \quad (8)$$

と書き直せる．

量子論の分配関数 Z_{qu} と統計力学の分配関数 Z_{stat} が，「複素化」を通じてつながると言うことを説明しよう．TM の複素化 $TM_{\mathbb{C}} := TM\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ を考える．$TM_{\mathbb{C}}$ には $\mathbb{C}$ の偏角の回転から誘導される自然な $U(1)$ 作用

$$W_\theta : TM_{\mathbb{C}}\to TM_{\mathbb{C}}, \quad (x,v)\mapsto(x,e^{i\theta}v)$$

がある．関数 $L:TM_{\mathbb{C}}\to\mathbb{C}$ に対しては，値域 $\mathbb{C}$ にも $U(1)$ 作用があると考えて

$$W_\theta(L(x,v)) = e^{-i\theta}L(x,e^{i\theta}v)$$

で作用を定義する．これらの $U(1)$ 作用を **Wick 回転**と呼ぶ[*2)]．Wick 回転の下では，$\gamma:\mathbb{R}\to M$ の lift $\tilde{\gamma}:\mathbb{R}\to TM$ は $TM_{\mathbb{C}}$ 内で

$$W_\theta\circ\tilde{\gamma}:\mathbb{R}\to TM_{\mathbb{C}}, \quad \tau\mapsto(\gamma(t),e^{i\theta}\dot{\gamma}(t))$$

---

*2) 場の理論の教科書では，『時間軸を実軸 $\mathbb{R}$ から θ だけ回転させると ⋯』といった説明がよくなされる．

という経路に変形されるので，作用汎関数は

$$W_\theta(S[\tilde{\gamma}]) = \int e^{-i\theta} L(\gamma(t), e^{i\theta}\dot{\gamma}(t))dt$$

となる．いま，Lagrangian L が(4)のように(fiber 座標 v によらない) potential エネルギーと fiber 方向座標 v の2次形式である運動エネルギーの和で書かれていると仮定しよう．すると被積分関数は

$$\begin{aligned} &e^{-i\theta} L(\gamma(t), e^{i\theta}\dot{\gamma}(t)) \\ &= e^{i\theta}\frac{m}{2}(\dot{\gamma}(t))^2 - e^{-i\theta}U(\gamma(t)) \end{aligned}$$

と $U(1)$ 作用の重みが異なる寄与の和で表される．特に 90° 回転（$\theta = \frac{\pi}{2}$）の下では，

$$\begin{aligned} W_{\frac{\pi}{2}}(S[\tilde{\gamma}]) &= \int (-i)L(\gamma(t), i\dot{\gamma}(t))dt \\ &= i\int \left(\frac{m}{2}(\dot{\gamma}(t))^2 + U(\gamma(t))\right)dt \\ &= i\int H(\bar{\gamma}(t))dt \end{aligned}$$

となり，Lagrangian が Hamiltonian に化ける[*3)]．つまり，分配関数のレベルで

$$\begin{aligned} W_{\frac{\pi}{2}}(Z_{\mathrm{qu}}) &= \int e^{\frac{i}{\hbar}\int W_{\frac{\pi}{2}}(L[\tilde{\gamma}])dt}\mathcal{D}\gamma \\ &= \int e^{-\frac{1}{\hbar}\int H(\bar{\gamma}(t))dt}\mathcal{D}\bar{\gamma} = Z_{\mathrm{stat}}\Big|_{kT=\hbar} \end{aligned}$$

が成り立ち，90° の Wick 回転によって量子力学は統計力学とつながることがわかった[*4)]．このことは，(2) 式で見たように，力学の基本であるハミルトン流が熱力学の基本である勾配流を 90° 回転して得られたことの経路積分バージョンと言える．

場の理論の教科書を紐解けば説明されているように，**Feynman 伝搬関数**は，Klein–Gordon 作用素 $\square - m^2$ に対する Green 関数なので

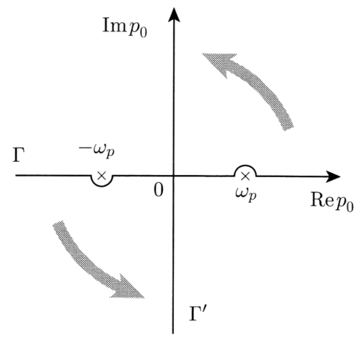


図1 Feynman propagator の積分路.

$$G(x,y) = \int_{\mathbb{R}^4} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip(x-y)}}{p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - m^2}$$

という積分表示を持つ．空間運動量 p_1, p_2, p_3 に関する積分は問題がないが，エネルギー p_0 の積分は $\omega_p = \sqrt{m^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} > 0$ とするとき，$\pm\omega_p$ に特異点を持つので，p_0 の積分路 Γ は何らかの方法で特異点を避けなければならない．避け方には都合4通りの可能性がある．Feynman は図1のように $-i\infty$ から $+i\infty$ に向かう虚軸 Γ' に Wick 回転できるよう，Γ は特異点 ω_p を上側，$-\omega_p$ を下側に避けるべきであると考えた．数学的に言えば，場の理論の相関関数はすべて楕円型作用素を使って定式化したのち，最後にそれを解析接続して解釈すればよいということになる．

もし作用汎関数が，磁場中の電子の運動を表す

$$S_{\mathrm{int}} = \int \boldsymbol{A}(x(t)) \cdot \boldsymbol{v}(t)dt$$

のような形の相互作用項を含んだとすると，Wick 回転に対する応答の違いから，90° の Wick 回転後の Hamiltonian が虚数部分を持つことになる．すると，それを対角化する量子状態は，磁場の存在しない場合から見ると「回転」しているように見える．いわば磁場の効果により，複素構造が「変形」を受けることになる．これらのことは，磁場に限らずインスタントン数のような位相的な不変量が作用積分に寄与する場合には常に生じる効果である．ゲージ理論では，結合定数 g と θ 角を組み合わせて上半平面に棲む複素数 $\tau = \frac{\theta}{2\pi} + \frac{4\pi i}{g^2}$ で表すと双対性の変換が綺麗に書かれることなど

*3) より一般的には T^*M のファイバー方向の経路積分が TM と T^*M を繋ぐ Legendre 変換（一般化運動量）の関係を与え，それを通じて H と L, γ と $\bar{\gamma}$ の対応を付けるべきなのだが，ここでは話を簡単にするため省略する．

*4) 場の理論を数学的に厳密な枠組みに載せる方法論として，構成的場の理論がある．そこでは，場の理論の分配関数を統計力学の分配関数の Wick 回転で「定義」するという立場をとる．

も，こうしたことと関連している．

いずれにせよ，場の量子論と統計力学は解析接続の関係にあり，分配関数＝数え上げの母関数という見方を生むことになる．

点粒子から弦に移行すると，多様体 M 上の

$$\left(\bigotimes_{n=0}^{\infty} \Lambda_{q^{2n+1}}(TM)\right) \otimes \left(\bigotimes_{n=0}^{\infty} S_{q^{2n+2}}(TM)\right)$$

という無限階数のベクトル束を扱うことがある．ただし，$\Lambda_t V = 1 + tV + t^2\Lambda^2 V + t^3 \Lambda^3 V + \cdots$ はベクトル束 V の交代積を束ねたものであり，同様に $S_t V = 1 + tV + t^2 S^2 V + t^3 S^3 V + \cdots$ は対称積を束ねたものを表す．TM が，運動 $\mathbb{R} \to M$ を Taylor 展開したときの「1 次の係数」を表す空間と見ると，弦理論では，Taylor 展開のすべての次数の係数（およびその超対称化）を必要としているようにも見える．運動方程式が 2 階で表されていたのは，弦理論の観点からは，あくまでも点粒子の極限での近似的なものの見方に過ぎないのかも知れない．

6. Schrödinger 方程式とスペクトル曲線

固有値が実数か虚数かの区別が物理的にも重要な違いとなって現れる例は，1 次元の量子力学にすでに見出すことができる．

ポテンシャル $u(x)$ を受けて運動する粒子を記述する Schrödinger 方程式

$$-\psi''(x) + u(x)\psi(x) = \lambda\psi(x) \qquad (9)$$

を考えよう．この Strum–Liouville 作用素の固有値問題は，古くから非常によく研究されているものである．2 階常微分方程式 (9) の解空間の次元は 2 であり，$(\psi_1(x), \psi_2(x))$ を解の基本系（解空間の基底）とすれば，**Wronski 行列式**

$$W(x) = \begin{vmatrix} \psi_1(x) & \psi_2(x) \\ \psi_1'(x) & \psi_2'(x) \end{vmatrix} \qquad (10)$$

は x によらない定数であることはよく知られている．

いま，ポテンシャル $u(x)$ が周期性 $u(x) = u(x+L)$ を持つとしよう．このとき $(\psi_1(x+L), \psi_2(x+L))$ もまた解の基本系であるから，ある 2 次可逆行列 M を用いて

$$(\psi_1(x+L), \psi_2(x+L)) = (\psi_1(x), \psi_2(x))M \qquad (11)$$

と書ける．M を**モノドロミー行列**と呼ぶ．微分方程式 (9) が実係数であることから，M は実行列である．式 (11) の $x=0$ での値とその微分から

$$\begin{pmatrix} \psi_1(L) & \psi_2(L) \\ \psi_1'(L) & \psi_2'(L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1(0) & \psi_2(0) \\ \psi_1'(0) & \psi_2'(0) \end{pmatrix} M$$

という関係が得られ，一方 Wronski 行列式 (10) が定数であることから $\det M = 1$ がわかる．以上より，モノドロミー行列 M は常に 2 次特殊線型群

$$SL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \ :\ ad - bc = 1 \right\}$$

の元であることがわかった．

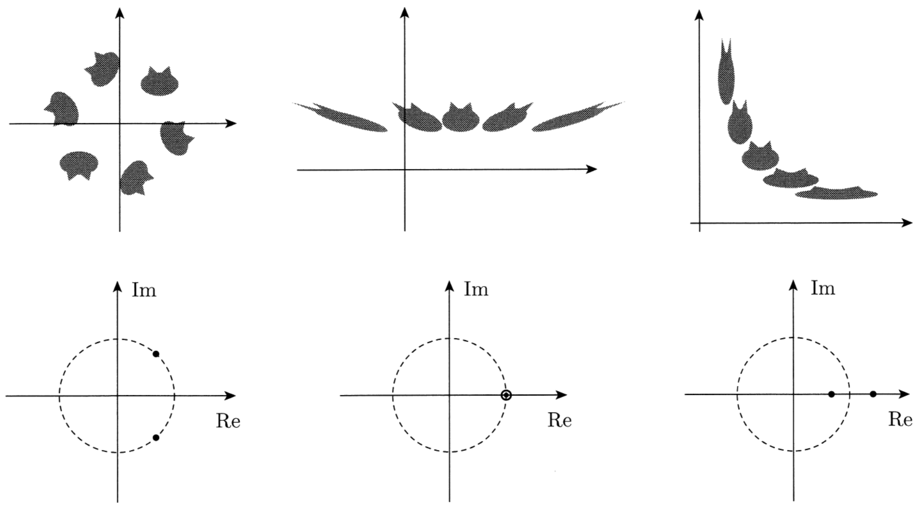
$SL_2(\mathbb{R})$ は数理物理学で非常によく現れる群である．これは平面 $\mathbb{R}^2$ の線型変換で面積と向きを保つもの全体のなす群であり，1 自由度系の Hamilton 力学系の相流としてもお馴染みのものであろう．モノドロミー行列 $M \in SL_2(\mathbb{R})$ の固有値 μ は特性多項式

$$\mu^2 - t\mu + 1 = 0 \ \Leftrightarrow\ \mu + \mu^{-1} = t \qquad (12)$$

の根である．ここに $t = \operatorname{tr} M$ は M のトレースである．μ が固有値ならば逆数 $1/\mu$ もまた固有値である．

2 次方程式 (12) の判別式は $D = t^2 - 4$ であるから，トレース t の絶対値が 2 を越えるかどうかで固有値が実か虚か，ひいてはモノドロミー M の線型変換としての性質が大きく異なる．

$|t| < 2$ のときは絶対値が 1 で偏角が互いに逆の 2 虚根を持ち，M は**楕円型** (elliptic) と呼ばれる．$|t| > 2$ のときは偏角が等しく（ともに 0 か π），絶対値が互いに逆数の 2 実根であり，M は



(a) $|t| < 2$　(b) $|t| = 2$　(c) $|t| > 2$

図 2　$SL_2(\mathbb{R})$ の線型変換としての作用（上段）と固有値の複素平面における分布（下段）．(a) 楕円型 (b) 放物型 (c) 双曲型．

双曲型（hyperbolic）と呼ばれる．中間の $|t| = 2$ のとき，M は重根を持つが対角化不可能で，**放物型**（parabolic）と呼ばれる（図 2 参照）．

さて，周期ポテンシャル $u(x)$ を固定して，エネルギー固有値 λ を動かすことを考えよう．微分方程式 (9) の解はパラメータ λ に解析的に依存するから，モノドロミー行列 M，そのトレース t や固有値 μ は λ の解析的な関数であり，以下 $M(\lambda)$, $t(\lambda)$, $\mu(\lambda)$ と書くことにしよう．λ を変化させると，$t(\lambda)$ も変化するので，$M(\lambda)$ が楕円型から放物型を経由して双曲型へ変化したり，その逆が起こったりするだろう．

固体物性論などでは，ポテンシャル $u(x)$ の周期 L は原子間隔程度のミクロなサイズだが，電気伝導のような興味のある現象はそれに比べて非常に大きいマクロなサイズ nL $(n \gg 1)$ の性質であることがほとんどである．そこで，

- 十分大きな n に対して周期境界条件 $\psi(x + nL) = \psi(x)$ を満たす方程式 (9) の解が存在するための λ の条件は何か？

という問題を立てることにしよう．そのような固有関数解 $\psi(x)$ は Bloch 解と呼ばれ，サイズ L 程度のミクロな変動を無視すれば空間方向に一様に拡がった進行する粒子を表すので，伝導状態に対応する．

ずらし $x \mapsto x + L$ の生成元がモノドロミー $M(\lambda)$ であったことに注意すれば

$$M(\lambda)^n = \mathbf{1}, \quad (\exists n \gg 1) \tag{13}$$

となることが伝導状態の固有関数 $\psi(x) = \psi(x + nL)$ が存在するための必要十分条件である．条件 (13) は，モノドロミーの固有値 $\mu(\lambda)$ が 1 のベキ根であると言いかえてよい．特に，モノドロミー $M(\lambda)$ は楕円型でなければならない．$M(\lambda)$ が楕円型だからといって，その固有値 $\mu(\lambda)$ がベキ根というわけではないが，エネルギー λ をほんの少しでも動かせば固有値 $\mu(\lambda)$ は円周 $|\mu| = 1$ 上を動くので，必ずベキ根の点を通過する．つまり，伝導状態は稠密に **band**（伝導帯）をなして存在する．

逆に，エネルギー固有値 λ に対するモノドロミー行列 $M(\lambda)$ が双曲型なら，その固有値 $\mu(\lambda), \mu(\lambda)^{-1}$ の絶対値は 1 とは異なるのでベキ根にはなり得ない．従って系は伝導状態になく，**gap**（空隙）と呼ばれる．

以上のことから，モノドロミー行列 $M(\lambda) \in SL_2(\mathbb{R})$ の楕円型と双曲型という区別が，エネル

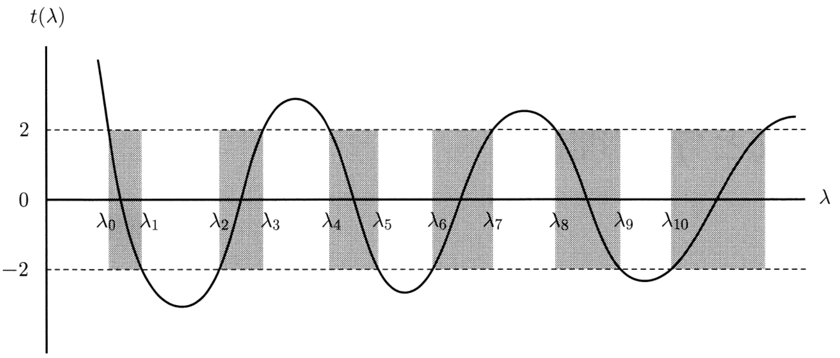


図 3　$t(\lambda)^2 < 4$ となる band 領域.

ギー準位 λ の伝導帯 (band) と禁止帯 (gap) という区別に対応することがわかった．実 λ 直線のうち，band に対応する開部分集合 $\{\lambda \in \mathbb{R} : t(\lambda)^2 < 4\}$ は，図 3 のように $t(\lambda)^2 = 4$ の根

$$\lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \cdots$$
$$\cdots \leq \lambda_{2k-2} < \lambda_{2k-1} \leq \lambda_{2k} < \cdots$$

を用いて可算個の開区間 $J_k = (\lambda_{2k-2}, \lambda_{2k-1})$ の和集合で表されることがわかる*5)．

いま，天下りだが複素 λ 平面の 2 重分岐被覆で，バンド $J_k = (\lambda_{2k-2}, \lambda_{2k-1})$ に沿って cut を持つ Riemann 面を考えると，それは $\mu + \mu^{-1} = t(\lambda)$ で定義され，$(\lambda, \mu) \leftrightarrow (\lambda, \mu^{-1})$ という入れかえの対称性をもつ超楕円曲線――**スペクトル曲線**が得られる．4 次元超対称ゲージ理論で中心的な働きをする Seiberg–Witten 曲線もまたスペクトル曲線の一種であり，monopole やゲージボゾンなどの粒子の質量がリーマン面上での周期積分で表されることが知られている．

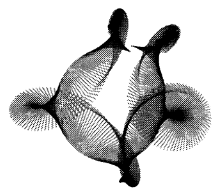
7. 終わりに

量子論以降の現代物理学にとって，複素数はもはやなくてはならぬ存在である．複素数の有用性は，多くの場合，代数閉と解析接続の両方の性質に支えられている．もれ聞くところでは，複素数の普通の位相に関しては全く収束しないが，それでいて非常に高度な対称性を持つ不思議なベキ級数の種族たちが，近年数理物理の辺境を騒がしているらしい．自然は新たな「数」を欲しているのだろうか？

（かとう・あきし，東京大学大学院数理科学研究科）

*5)　例えば田中俊一・伊達悦朗『KdV 方程式』紀伊國屋数学叢書 を参照.

有理型関数と学習理論



渡辺　澄夫

1. 学習理論とは

実世界を計測してデータが得られたとき，データから情報源を推測することを「学習」と言う．また，学習がどのように進むのかを解明する理論を学習理論と言う．

簡単な例で説明してみよう．

正規分布を情報源とするデータがあるとき，データから平均と分散を求めることによって，情報源の正規分布をおおよそ知ることができる．またデータの数が増えるにつれて推測の精度は少しずつ向上していくであろう．これが学習の過程である．

次に，未知の分布を情報源とするデータがあるとき，情報源を仮に数個の正規分布の重ね合わせであると考えて，正規分布の個数と，それぞれの正規分布の平均と分散を推測することにより，情報源の確率分布をおおよそ知ることができる．データの数が増えるにつれて，情報源の確率分布について少しずつ詳しい形がわかっていくであろう．

この２つの学習の問題は，「データからの学習」という点では共通している．しかしながら，前者は，確率分布の構造は分かっていて，平均や分散の値だけを知ろうとする問題であるのに対して，後者は，それらの値だけではなく，確率分布の構造も知ろうとする問題である．

前者を「値の学習」と呼び，後者を「構造の学習」と呼ぶことにする．この２つの学習には，質的な違いがあるのだろうか．

2. データから構造を学習する

「構造の学習」という問題を統計学の観点から考えると，次のように特徴づけすることができる．

(1)　パラメータと確率分布が一対一に対応しない．
(2)　フィッシャー情報行列は正定値ではない．
(3)　クラメル・ラオの不等式が意味を持たない．
(4)　対数尤度関数は２次関数で近似できない．
(5)　最尤推定量の漸近正規性が崩れる．
(6)　ベイズ事後分布は正規分布に漸近しない．
(7)　尤度比検定量がカイ二乗分布に従わない．
(8)　情報量規準が予測誤差の平均値を与えない．

このため，「構造の学習」においては，通常の統計学の教科書に書かれている方法や理論は，基礎から応用に至るまで，すべてが成り立たない．「値の学習」において通常の統計学の方法が利用できたことと比べると，２つの学習には大きな違いがあることがわかる．「構造の学習」に使うことができる学習理論を作るにはどうしたらよいのだろうか．

1990 年代の頃，著者は，「構造の学習」についての学習理論を作るため，いろいろな方法を試したことがある．まず，先人の方法を修正して使うことはできないかと考えた．フィッシャーによって作られた漸近理論は，パラメータと確率分布が一対一に対応していて，情報行列が正定値であれば用いることができるから，情報行列の固有値０に対応する部分空間を除去すれば問題解決につながるのでは，と考えたのである．しかし，その方法では何もわからなかった．ある関数が原点の近傍で２次関数で近似できない場合には，どれだ

け高次の項までが本質的に関与しているかは，ケースバイケースであるからである．次に，一般論が難しいときは，具体的なモデルを調べてみる意義がある．三層神経回路網と呼ばれる学習モデルについて，具体的な計算を行ってみた．2次式で近似できないので，非常に煩雑な計算になるが，学習の過程がフィッシャーの理論とは異なることを確かめることができた．しかし，構造の学習について一般的な法則を導くことはできなかった．

3. 有理型関数の登場

1998年頃「構造の学習」において，次の複素関数が大切な役割を果たすことがわかった．

真の情報源と，パラメータ w によって定まる確率分布との距離を $K(w)$ とし，パラメータの集合上の確率分布を $\varphi(w)dw$ とする．このとき，一変数複素数 z の関数 $\zeta(z)$ として

$$\zeta(z) = \int K(w)^z \varphi(w) dw$$

を考える．ここで $K(w)$ は w の実解析関数であるとする．関数 $\zeta(z)$ は領域 $Re(z) > 0$ では複素関数として正則である．実は，$\zeta(z)$ は，複素平面全体に有理型関数として一意に解析接続できて，その極はすべて負の実軸上にある有理数である．その極のうち，最も大きなもの，すなわち，最も原点に近いものを $(-\lambda)$ とする．このとき，学習理論において次のことがわかる．データの個数が n 個であるとする．学習による推測の真の情報源に対する誤差 $G(n)$ は，

$$G(n) = \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

という挙動を持っている．ここで $o(1/n)$ は $1/n$ よりも早く0に収束する項である．つまり，データ数が多くなるとき，誤差がデータ数に反比例するように学習の過程は進んでいく．また，その比例定数は $\zeta(z)$ の最大極である．

4. 複素関数の力

学習の過程を定めている定数 λ は，数学的にも大切な量であるはずである．解析写像 $w = g(u)$ によって，パラメータを w から u に取り替えて，

$$K(w) \mapsto K(g(u)),$$
$$\varphi(w) \mapsto \varphi(g(u))|g'(u)|$$

と置き換える（$|g'(u)|$ はヤコビアン）と，有理型関数 $\zeta(z)$ を u 上の積分として定義することもできるから，定数 λ は双有理不変量である．写像 $w = g(u)$ として，ブローアップやトーリック改変などの代数幾何でよく研究されているものを考えると λ について詳しい情報が得られる．学習理論は対数閾値と呼ばれる量と数理的な関係を持っているのである．また，$K(w)^z$ をパラメータ集合上の超関数であると考えれば，その代数解析的な特徴を用いて $\zeta(z)$ の性質を調べることができる．こちらはベルンシュタイン・佐藤の多項式と関係を持っている．このように複素関数は，全く異なる世界が実は結ばれているという〈数学の森〉を描き出すという力を持っている．従来の統計学の方法ではアプローチが困難であった「構造の学習」の数理が解明されたのは，複素関数のこの力によるところが極めて大きい．

5. 終わりに

学習理論に戻ろう．私たちが実世界と対峙するとき，真の情報源は不明であることが普通である．そこで，真の情報源が分からない状況下において，観測されたデータだけから λ を求めたいという要望がある．最近の研究により，λ とは別の双有理不変量であって，観測結果から λ の値を与えるものが発見された．こちらの不変量は，どのような数学と関係を持つか今のところ不明であるが，学習理論のさらに深い発展が期待されている．

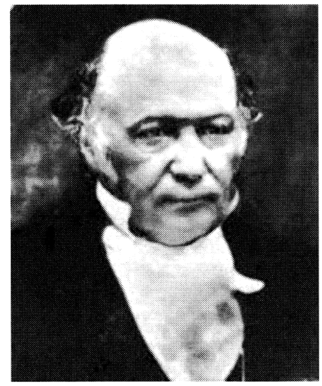
参考文献

1) 渡辺澄夫, “学習モデルの代数幾何”, 数理科学, No.**444**, pp.59–65, 2000, サイエンス社.
2) Sumio Watanabe, “Algebraic geometry and statistical learning theory,” Cambridge University Press, 2009.

（わたなべ・すみお，東京工業大学精密工学研究所）

複素数からクリフォード代数へ

前田 吉昭



W.R. ハミルトン（1805–1865）.

1. 実数から多元数へ

「数」という概念が数学にとって重要であることは紛れもない.「数える」ことのために，自然数，そして有理数から無理数へと数の概念が広がり，「実在する数」として実数を認識してきた．一方で，複素数という「実際にはあり得ない数」を使うことで，数学における様々な問題が説明できた事実を見逃すことはできない．複素数は，2 次方程式や 3 次方程式の解の公式を具体的に書き表す際に $i = \sqrt{-1}$ を導入することから始まる．複素数自身は代数方程式の解を記述する役割を負ったことから代数においての発展は当然であったが，複素平面の導入から関数論として，幾何学や解析学において用いられたことが，大きな発展と言えるだろう．このような「実存として見えない」概念や考え方を生み出すことで不思議な現象を説明していくというのが，数学の発展の一つの方向であり，複素数はその意味でこの典型的な例である．そうなると複素数を越える「数」というものを考えたくなるのは世の常であろう．

実際，ダブリン出身の物理学者であったハミルトン（William R. Hamilton）は，4 元数や 8 元数といった多元数を生み出すことを考えた．ハミルトンは，実数の演算を実数の組の演算へ拡張することを考え，その一般化に執念を燃やした．複素数 $a + ib$ を 2 つの実数の組 (a, b) と同一視し，その加法と乗法の演算を

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &= (a + b, c + d),\\ (a, b) \times (c, d) &= (ac - bd, ad + bc)\end{aligned} \tag{1}$$

として表すと，最初の式は，2 つの実数の組をちょうどベクトルの成分として考え，複素数を複素平面の点として考えたときのベクトル表示とその和の演算となる．それゆえ加法は，実数の組に対してベクトルの加法として拡張することが自然にできる．ところで，乗法を実数の組に拡張するというのはかなりのアイデアが必要となる．ハミルトンは，4 つ組の実数の組に乗法を取り入れられないかということを考えた．実数の 4 つ組 (a, b, c, d) を複素数からの一般化として，3 つの「虚数単位」i, j, k を用いて，$a+ib+jc+kd$ (a, b, c, d は実数）で表した．ハミルトンはこの i, j に最終的に $ij = -ji$ という条件を課し，4 元数を作るための 3 つの重要な元 i, j, k についての関係 $i^2 = -1, j^2 = -1, k^2 = -1, ij = -ji = k, ki = -ik = j, jk = -kj = i$ に到達した．これがクリフォード代数の関係式である．

2. クリフォード代数

クリフォード代数の元は，4 元数 i, j, k を用いて，

$$\alpha = a + bi + cj + dk, \quad a, b, c, d \text{ は実数}$$

で表せるもので，この元に和，スカラー倍と積を上に与えた関係式で計算することで決める．この考え方は複素数を導入するのと同じではあるが，非可換である．

複素数は，複素平面の点として表せることで，可視的に理解できるが，クリフォード代数の元（4 元数）はある意味で，かなり抽象的，人工的に作られてきた「数」なので，それを実在として，理解する方法は難しい．物理から 4 元数の必然性が出てきたことは，大きな驚きである．まず，クリフォード代数を実現するために，以下の行列を考える．

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$
$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \tag{2}$$

ここで，σ_i $(i=1,2,3)$ はパウリ行列と呼ばれる．このパウリ行列をそれぞれ，4 元数の i, j, k にそれぞれ対応させることで，4 元数を複素 2 次行列として見ることができる．行列に表示をしたことで，クリフォード代数の元は，むしろ「非可換な点」といった可視化が与えられたと思ってもよいのではないか．実際には，この場合，クリフォード代数は 2 次複素行列全体と一致している*1)．

■ 3. クリフォード数の解析学や幾何学 ■

クリフォード代数を認めることの重要性は，物理でのスピンの概念を説明することである．通常の物理での対称性は特殊直交群 $SO(n)$ で扱えるが，スピンはその非自明な 2 重被覆であるスピン群 $Spin(n)$ によって扱う必要があった．そのために，クリフォード代数が必要である．例えば，パウリ行列 σ_i $(i=1,2,3)$ を使って，$\mathbb{R}^3$ 上の微分方程式

$$D\psi = \sum_{i=1}^{3} \left(\sigma_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \psi(x) = 0 \tag{3}$$

の解を考える．ここで，$\psi(x)$ はベクトル値関数である．これは最も単純なディラック方程式であり（一般のディラック方程式はゲージポテンシャルが含まれている），その解はスピノールという物理的に新しい概念を与えている．ディラック方程式は，微分作用素 $D = \sum_{i=1}^{3} \sigma_i (\frac{\partial}{\partial x_i})$ の 2 乗を考えると

$$D^2 = -\Delta = -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{4}$$

となり，ラプラス作用素の 2 乗根をとったような形となる．ラプラス方程式の解，$\Delta f = 0$ は，調和関数と呼ばれ，静電場や定常な温度分布の問題等の古典的な物理での問題，また量子論でのシュレディンガー方程式に対する固有値問題等で重要な役割を果たしている．複素関数では，コーシー・リーマン方程式によって定義される正則関数がある．これは実数で書き直すと調和関数になる．しかし，正則関数を，実関数の解析として考えるのではなく複素関数論として整備したことが，物理や工学での大きな貢献があったことである．同じように，クリフォード代数を使って定義されるディラック方程式の解であるスピノールは，電子やフェルミ粒子の内在角運動量（スピン角運動量）の性質を研究するために，量子力学に適用され，量子物理学の中で発展している．

実数をもとにして微積分が開発され，それが複素数，さらにはクリフォード代数へ拡張されたことの教訓は，新しい代数を生み出し，いままで我々が不思議に考えてきた現象を説明する機会を得，幾何学や物理学への研究への貢献も望めた．複素数は，複素平面を考え，その「点」という考え方で可視化をすることができた．一方，クリフォード代数からは，「行列」の元という形で，「点」概念というより「非可換」の概念に進んでいく．実数から構成される幾何学的空間は，球面を典型的な例とするいわゆる実多様体であったが，複素数からは，リーマン面やさらに一般化された複素多様体が得られ，「実際にはあり得ない数」である複素数を使って，「実際にはあり得ない空間」である非ユークリッド幾何学の研究を発展させたことは，一つの典型的な例であろう．クリフォード代数の幾何学への展開は，スピン多様体を考えその上での指数定理を発展させることから量子論と結びついている．

■ 4. 最後に ■

ハミルトンは，かなりの苦心の中で，多元数を生み出したと言える．4 元数のハミルトンの格闘については，John Stillwell が書いた著書『Mathematics and its History』（日本語版，上野健爾・浪川幸彦監訳『数学のあゆみ』（下巻），朝倉書店）の中で詳しい解説がある．「実際にはあり得ない」概念の創出は，多くの苦心と批判の中で生まれてくるが，このような過程の中から多くの数学や物理学に新しい変革を与えていくことを歴史が示していると言えよう．

（まえだ・よしあき，慶應義塾大学理工学部）

*1) 一般のクリフォード代数の定義は，n 次元ベクトル空間の上でその基底 $e_1, \cdots, e_n$ にクリフォード関係式 $e_ie_j + e_je_i = -2\delta_{ij}$ を入れた結合的代数を言っている．この意味では，いままで述べたのは 4 次元クリフォード代数と言うべきものである．

複素数と数理工学



田中　剛平・合原　一幸

1. 数理工学とは？

数理工学は，実現象に学ぶ数学である[1)]．その応用研究においては，個別の具体的な課題を解決するのが最大の関心事であるから，問題解決に役立つ数学理論がすでにあればそれを適用するが，場合によっては適切な方法をあらたに考え出すことが必要となる．数理工学では，そうした実問題解決への要請から生じる数学を体系化し，理論の一般化やアルゴリズムの汎用化によって，実際に役立つ理論的な土台を整備し発展させることを目指している．他方で，数理的発想を活かした新しい工学技術の提案も大切な目標の一つである[2)]．

そのため，数理工学で扱われる研究対象を眺めると，数学上の概念が様々な場面で役に立っていることを実感できる[3)]．特に複素数は工学理論では欠かせない概念なので，必然的に数理工学でも複素数が登場する場面は少なくない．本稿では，数理工学の典型例として，複素数と縁の深い信号処理や情報処理の一端を紹介しよう．

2. 複素信号処理

工学で扱う物理的な対象として，光，音，電磁気等の様々な信号がある．これらはいずれも時間とともに変動する波動現象としての性質をもち，振幅と位相という情報からなるので，複素数表現と相性が良い．複素信号処理は，**複素関数論**を基礎として，様々な工学分野で広く用いられている．

いま実信号を $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$，すなわち振幅 A で位相ずれ ϕ の周期信号で表す．ω は角周波数で，周波数 f で表すと $\omega = 2\pi f$ である．三角関数と指数関数を結びつけるオイラーの公式に従えば，この信号は，**複素信号** $Ae^{j\omega t+\phi} = A\cos(\omega t + \phi) + jA\sin(\omega t + \phi)$ の実部に相当する．ここで j は虚数単位を表す．工学分野では電流を i と表すことが多いので，混乱を避けるために j が広く使われる．

信号解析の中核をなす**フーリエ解析**は，一般のアナログ信号を異なる周波数を持つ複素信号に分解することにより周波数成分を調べる方法である．時間領域の信号 $f(t)$ をフーリエ変換すると周波数領域のスペクトル $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$ を得る．この変換によって，信号にどの周波数成分がどのくらい含まれるかが分かる．

近年ではコンピュータによる信号処理が高精度で簡便に行えるので，アナログ信号を一定時間間隔でサンプリングしたディジタル信号の処理を考えることが多い[4)]．ディジタル時系列信号 $\{f(n)\}_{n=0}^{N-1}$ の周波数解析には**離散フーリエ変換** $F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)e^{-\frac{2\pi j}{N}kn}$ $(k = 0, \ldots, N-1)$ が用いられる．離散フーリエ変換の一般化とも考えられる z **変換**は $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n}$ と定義される．ここで，z は複素変数である．

入力信号 $x(n)$ を出力信号 $y(n)$ に変換する線形時不変システム $y(n) = g(x(n))$ を考えよう．インパルス信号 $\delta(n)$ を入力したときのシステム応答を $h(n) = g(\delta(n))$ とすると，任意の入力 $x(n)$ に対して $y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$ が成り立つ．これを**畳み込み**の関係と言う．入力 x，出力 y，インパルス応答 h の z 変換をそれぞれ $X(z), Y(z), H(z)$ とすれば，$Y(z) = H(z)X(z)$ となり，畳み込みの関係が乗算に帰着される．このとき $H(z) = Y(z)/X(z)$

を**伝達関数**と言う．制御理論では，複素平面上で伝達関数の極配置を考えることで，望みのシステム応答の実現を目指す．

信号の加工や雑音の除去を行うシステムを**フィルタ**と言う．ディジタル信号のフィルタはほとんどの電気製品に必須である．周波数帯域や位相特性の変換を工夫することにより，様々なフィルタが提案されている．カルマンフィルタは，誤差のある離散的な観測値を用いて動的システムの状態を推定あるいは制御するために用いられる．適応フィルタは伝達関数を自己適応させるフィルタで，多くの適応アルゴリズムが提案されている．複素信号への適用を前提としたカルマンフィルタや適応フィルタの研究も盛んに行われている[5]．

3. 複素ニューラルネットワーク

信号処理に限らず，実数空間で展開されてきた理論やアルゴリズムを複素空間に拡張するという試みも少なくない．計算知能の分野で関数近似，学習，予測，パターン認識，最適化などの情報処理の方法論を与えるニューラルネットワークにおいても，複素数データとの相性の良さから，**複素ニューラルネットワーク**が提案され，光電子工学，多階調画像処理，リモートセンシング，量子デバイス，脳波解析などへ応用範囲が拡大しつつある[6]．

例えば劣化画像において，周波数領域で画像信号の周波数成分とノイズの周波数成分が大きく重なる場合，線形フィルタでは分離が難しい．このとき，ニューラルネットワークは**非線形フィルタ**として働くので，ノイズを除去することができる．

複素ニューロンは複素数入力を K 個の離散値のいずれかに変換する閾値関数を持つ．すなわち，複素平面を実軸を基準として角度 $2\pi/K$ のセクターに K 等分して，k $(0 \leq k < K)$ 番目のセクター内の任意の複素数を単位円上の $e^{\frac{2\pi}{K}jk}$ に対応させる写像である．これは，複素数が，その**位相方向の循環性**（周期性）ゆえに，離散値の表現にも適していることを示す好例である．

実際，例えば256色の濃淡値で表される多階調画像は，$K = 256$ の複素ニューロンのネットワークで処理できる．図1は，あらかじめ複数の多階調画像を複素ニューラルネットワークのシナプス結合係数に記憶

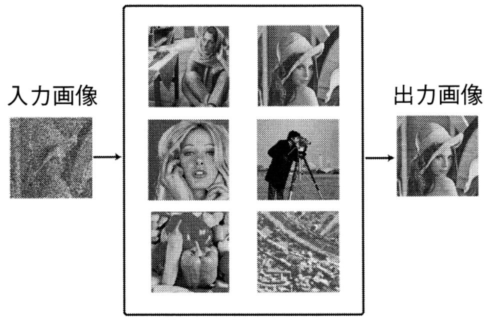


図1　複素ニューラルネットによる画像復元[7]．

（学習）させ，ノイズによって劣化した記憶画像の一つを入力したとき，ノイズを除去し元の画像を復元した例を示す[7]．

複素ニューラルネットワークの研究は発展途上で，まだ理論面で分かっていないことも多く，応用面でも他の手法との性能比較が現在進行中である．

参考文献

1) 特集「数理工学の地平」，数理科学，2002年12月号．
2) 東京大学工学部計数工学科数理情報工学コース編：『数理工学への誘い』，日本評論社，2002．
3) 合原一幸：『社会を変える驚きの数学』，ウェッジ，2008．
4) 棟安実治，田口亮：『非線形ディジタル信号処理』，朝倉書店，1999．
5) D. Mandic and V. Goh: "Complex Valued Nonlinear Adaptive Filters", John Wiley & Sons, Inc., 2009.
6) A. Hirose: "Complex-Valued Neural Networks", World Scientific, 2004.
7) G. Tanaka and K. Aihara: *IEEE Trans. Neural Networks.* (submitted).

（たなか・ごうへい，東京大学生産技術研究所）
（あいはら・かずゆき，東京大学生産技術研究所）

大沢 健夫

『函数論』の思い出

『函数論　第２版』吉田洋一著，岩波全書．夥しい読者を誇るこの本の初版が刊行されたのは，1938 年のことである．その２年前，L.V. アールフォース（1907–1996）は，幾何学的方法による複素関数論の研究により第１回のフィールズ賞を受賞し，岡潔（1901–1978）は第１論文を発表して多変数関数論の分野に開拓の狼煙を上げていた．1965 年の第２版で一新された巻末の参考書リストからは，これが理工系の基礎科目の教科書としてではなく，数学の最先端の研究分野への入門書として書かれたことが窺えるが，それもむべなるかなである．以来，数学の研究分野の勢力地図は大きく変化し，1989 年に著者が世を去り，この本も書店の棚から姿を消したのだったが，その後，愛読者たちのリクエストに応えて復刊されたことは，まだ記憶に新しい．無論のこと，名著としてのかくまでに明白な証をもつこの本に対して，小文は，屋上屋を架するような評を加えようとするものではない．ただ淡々と，これにこと寄せて筆者個人の思い出を綴ることにより，一冊の入門書が研究者に与え得る影響の，一つの実例を提供してみようとするだけである．

いつ頃からこの本が筆者の書架に並ぶようになったかは，定かではない．というのも，同世代の多くの数学者と同様，筆者がコーシーの積分定理を初めて知ったのは，高木貞治の『解析概論』によってであったから．筆者がこの本と特に親しくつきあい始めたのは，上京して大学に入学した後のことだが，下宿と大学を往復する以外のよけいな活動が過ぎたせいか，ついに定期試験の一週間前に高熱を出して寝込んだ頃のことであった．近所の医者に栄養注射を打ってもらって試験を受けたが惨憺たる出来で，単位不足で留年が決まってしまった．大学では進学振り分けというのがあり，当時の数学科は人気が高く，一旦取った単位の成績が悪かった筆者は，留年しても数学科に進める見込みはまったくなかった．そんな頃，夜遅くまでやっていた喫茶店でこの本を読んだ．第７章のルーシェの定理がそのときによく分かったので，覚えているのである．帰り際に，上着の柄が似合っていると店の人に声をかけられた．嬉しそうにしていたからかもしれない．

次に思い出すのはカラテオドリーの定理である．1972 年，数学を専攻するために他の大学を受け直し，再スタートをした夏，友人たちに誘われて勉強会に参加した．多変数関数論の入門書を読むセミナーだったが，そのとき初めてリーマンの写像定理の存在を聞かされて驚いた．その後，この本の第 10 章で等角写像の境界挙動に関するカラテオドリーの定理を知り，あらためて感心した．なるほど数学とはこんな風に発展していくものかと思った．ちょっと因縁めくが，78 年にフィールズ賞を受賞したプリンストン大の C. Fefferman が，74 年にこの定理を高次元化した．しかし筆者はその論文をすぐに読みたいとは思わなかった．他のことで忙しくしていたせいでもあるが，最先端の一流の理論にとっては糸口にすぎないカラテオドリーの定理の証明さえも，当時の筆者にとっては絶望的なほど難解だったからである．

そんなこんなで，大学院を受験する頃は，第 11 章から先の，調和関数や楕円関数に話がおよぶ所まではよく読めていなかった．具合の悪いことに，入試では，ポアソンの公式を使えば一発で解ける問題が出された．この公式が頭に入っていなかった筆者は，仕方なく正規族を用いる議論でその場をしのいだ．正規族はこの本では第５章に書かれていたので，なんとか身に付けていたからである．

ところが合格が決まった後で出題者のＫ先生に，「実はあの問題は，始めは正規族を使って解く問題として作ってあったのだが，そのままでは難しすぎると判断し，易しくして，ポアソンの公式を知っていれば解けるように変えたのだ」と明かされ，恥ずかしいやら嬉しいやら，以来あんな妙な気分は味わったことがない．このように，通常より２年長い，紆余曲折の多かった学部時代を通じ，折りにふれて筆者はこの本にお世話になったというわけである．この本に巡り会えたことは筆者の研究人生にとってまことに幸運なことであった．多変数関数論を 30 年以上研究することができた今，つくづくそう思う．

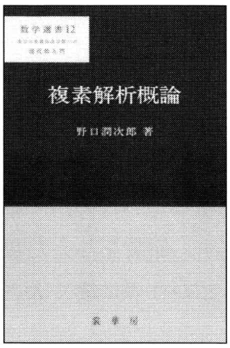
（おおさわ・たけお，名古屋大学大学院多元数理科学研究科）

留数解析　留数による定積分と級数の計算

一松信著，B6 判，158 頁，本体 1300 円，共立出版



科学者が「UFO が存在する可能性は 0 に近い」と言えば，「UFO は絶対に存在しない」という意味になるが，数学者が自著の序文で「独創にかかるものはほとんどない」と述べている本ほど，実は新規性にあふれている場合が多い．有名な例は，H. ワイルの “Die Idee der Riemannschen Fläche” であろう．一松先生のこの本がその例外でないことは，手に取って眺めただけで明らかである．



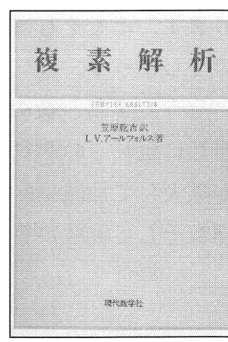
複素解析概論

野口潤次郎著，A5 判，318 頁，本体 4600 円，裳華房

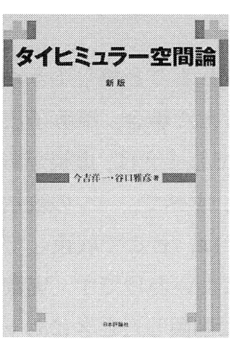
一定の知識の論理的に厳密な叙述は，しばしば歪像画のように読者に特定の視点を要求する．この本はその好例である．のっけからそんな雰囲気が漂う第 1 章からは，厳密性を尊ぶ著者の意図がひしひしと伝わってくる．その意味では非常に特徴のある入門書である．本書によって複素解析を学びながら，数学的分析能力の解像度を上げることは，理工系を志すものすべてにとって有益であろう．

複素解析

L.V. アールフォース著，笠原乾吉訳，A5 判，375 頁，本体 4515 円，現代数学社



1953 年，原書の出版直後，これに基づく講義が東大で行なわれた．本書はそれに出席した笠原氏による名訳である．序文によれば，この本は著者の恩師である E. リンデレーフの講義に影響を受け，幾何学的視点を強調している．そのような立場からの研究で，アールフォースはフィールズ賞に輝いたのだった．しかし筆者がこの本の真価を初めて思い知ったのは，これを授業で用いたときである．



タイヒミュラー空間論（新版）

今吉洋一・谷口雅彦著，A5 判，368 頁，本体 5000 円，日本評論社

1989 年の暮れに刊行された 296 頁の初版を，筆者は 92 年の 5 月から 6 月にかけて通読した．タイヒミュラー空間という，中途半端な対称性を持つ奇妙な領域に即した理論が，多変数関数論の新たな興味深い問題群を示唆しているように思われたからである．その思惑は外れたわけではなかったが，この本によるタイヒミュラー空間の人気の上昇に比べれば，筆者の研究は遅々として進まない．

複素数いろいろ

野口　潤次郎（聞き手：編集部）

1. 複素数を学ぶ意義と目的

――今回の特集ラインアップを見ると，複素数は数学はもちろんのこと，従来からの応用先である物理や学習理論，数理工学など，線形代数や微積分に劣らず多くの分野に使われていることがわかります．そもそも複素数を学ぶ意義と目的は何なのでしょうか．

そうですね．数の体系というのを考えたとき，自然に現れるのが自然数であるわけですが，それが拡大して加減乗除ができるような数として，有理数そして実数が登場します．そういう中で方程式を解くという立場から考えると，最終的にたどり着く数の体系が複素数になっているのが一番大きいのではないかと思います．係数を与えた数の体系の中で解が必ず求まるというのは凄く大きいですね．



野口潤次郎氏．

あと，複素数平面，いわゆるガウス平面と言われるものですが，ここでの数の演算と幾何学的意味が非常に明快に記述されることは非常に大きいと思います．複素数というのは，x,y を実数，i を虚数単位として，$z=x+iy$ と表されます．これは x,y という 2 つの数のペアと見れば同値なのですが，ペアと見ると見えてこないようなものが数と見ることによって見えてくるものがあります．こうしたことが複素数を学ぶ意義ではないでしょうか．

――そういった複素数ですが，その魅力や面白さは何でしょうか．

やはり，記述が単純化されることでしょうか．

例えば，微分方程式を考えた場合，演算子法が有名ですが，複素数を認めてしまえば，虚根がある場合，ない場合とか言わず，すべて，一つの表示法で解けてしまいます．あとは，どこで収束しているかということを考えればよいわけです．実数解をとる，というのは，実数に制限したときにちゃんと解になっているかどうかを最終的にチェックするだけになります．このように，ケースバイケー

スの話がすべて一つの方法に集約されてしまうわけです．

2. 最近の学習事情——日本と海外

——ところで，最近では工学系の学部を初めとして，関数論の講義が減少傾向にあり，ついには理学系の学部でも関数論がフーリエ解析の講義に吸収されたり，「応用解析」といった名称に変更されて他の分野と統合された講義になり，本格的に学習する機会が減ってしまっているようです．日本のこのような事情はいつ頃から始まったのでしょうか．また，海外ではどのような状況なのでしょうか．

そうですね．日本でいつ頃から始まったかというのは，ちょっと定かではありません．

ところで，こちらの今井功先生の本（『流体力学と複素解析』日本評論社，『応用超関数論 (1), (2)』サイエンス社）を見ると，書かれていることは，ほとんど複素関数論なんですね．ただ，内容は，もちろん留数定理も出てきますが，使っている中身はもう少し高度で，例えば，等角写像と呼ばれるものはふんだんに使われています．

留数定理まででよいということで講義をしていると他の分野の人でもこなしていけるのですが，その後の部分までやることになるとどうでしょう．昔は今井先生のように工学と理学の両方の分野で活躍された大家の方がちゃんと講義されていたわけです．留数定理以降の内容をちゃんとやらないようになってきたということは，工学としてもこれでよいのか，と心配するところがありますね．

確かに，フーリエ級数やラプラス変換は留数定理までの話で済んでしまうのですが，現実に流体の話をするとなると，例えば，この『応用超関数論』では佐藤超関数まで流体の話に結びつけて，展開しています．今井先生は外国からもこの話を講演してくれ，と呼ばれたこともあるそうです．

もう一つ，いわゆる旧帝大系の大学でも関数論の専門家が少しずつ減ってきているような印象を受けます．そういったことも影響しているのではないでしょうか．

また，海外の事情ですが，これは国によって違って，フランスは複素解析は自分たちが本家であるという自負からか，非常に活発です．複素解析の大家であるH. カルタンの複素解析の本（『Theorie elementaire des fonctions analytiques d'une ou plusieur variables complexes』，邦訳：高橋禮司訳『複素函数論』岩波書店）を学部から大学院まで勉強しているということで，昔のレベルが維持されているようです．

アメリカは一種の二重構造のようになっていて，学部ではあまり本格的にやらず，大学院に入ってから標準的なテキストを使って勉強し直します．例えば，L.V. アールフォースの『Complex Analysis』（邦訳：笠原乾吉訳『複素解析』現代数学社）のような本が標準的なテキストになります．

手前味噌で恐縮ですが，私が裳華房で書いた『複素解析概論』も英訳されていて，最近，これを授業で勉強したという若い研究者と会う機会が何度かありました．アメリカの大学院ではあの本の最後のほう，リーマンの写像定理やワイアシュトラスのペー関数，ピカールの大定理なども勉強しているみたいで結構きっちりやっているのだな，という印象を受けました．システム的に教える順序は違うのですが，やはり，複素関数論を使いこなすようなレベルの数学は大事なのではないかと思いますね．アメリカは学部レベルで見るとあまり高くないのですが，最終的なレベルは結構なところまで行ってますね．

3. 学習する上でのポイント

——こうした中で複素数や複素関数を学習するためのポイントは何でしょうか．

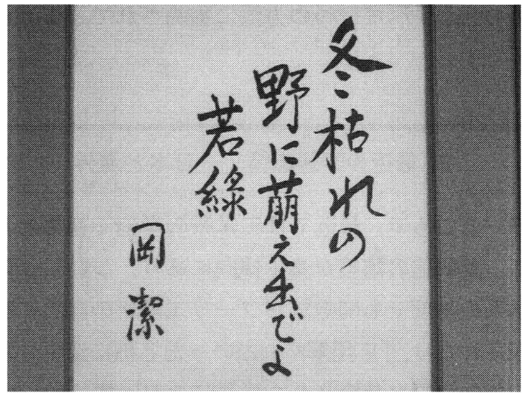
そうですね．考え方としては，先ほどもお話しした複素平面の幾何学が複素数を使うと代数的な変

換になっているということ，定理や理論ということになると，コーシーの積分定理や代数学の基本定理，留数定理が基本的なものとして挙げられます．

あとは，本ということになりますが，私自身も学生の頃，好きで何冊か本を読みました．読んでみてわかるのですが，本によって展開の仕方が異なっているので，初めて勉強するときに自分に合う本と合わない本が出てくるわけです．こういったことと直面すると自分が悪いのか，本が悪いのかわからなくなってしまいます．そういう場合は本とその人の思考の個性が合わないこともありますから，図書館などへ行って自分に合う本を探すことも勉強の仕方として大事なのではないかと思います．これは，理論的に厳密に話をもっていくとか，応用ベースで話をもっていくかということとは別なことなんですね．

あと，関数論の本格的な内容は留数定理以降にあるのではないかと思います．それは歴史的に見てもリーマンの写像定理やピカールの大定理，ポアンカレの双曲幾何，ミッタク・レフラーの定理，ワイアシュトラスのペー関数，といった重要な理論や定理がいろいろなところに登場していることからもわかります．それから多変数の複素関数論というところまで視野を広げると，クザン第１問題はミッタク・レフラーの定理に，クザン第２問題はワイアシュトラスの定理に相当するわけですが，こういったものが準備されると任意に複素平面上に点を与えて，そこに任意の数を予め指定しておくと，与えられた点で与えられた値をとる正則関数が存在するという，正則関数がいくらでもある，ということが証明できるんですね．逆に言うと，これらのことを証明するには留数定理以降の内容を勉強していないとできません．こういったところもポイントでしょうか．

どんな風にやるにしても，この辺りまでやっておけば本当の面白さ，というのが出てくるのではないでしょうか．



岡潔氏のメッセージ（直筆でなくコピー）．

4. 影響を受けたこと

――先生が研究者になるにあたって影響を受けたことをお聞かせ下さい．

そうですね．いろいろありますが，ちょうど高校から大学入学の頃は朝永振一郎先生がノーベル賞を受賞された頃で，最初は物理のほうを目指していたんですが，量子力学の本を読んでみると，数学がちゃんとわからないと駄目なのかな，と思い数学に力を入れた結果数学のほうに進むことになったんですね．

あとは，中学の頃と思いますが岡潔先生の「春宵十話」が毎日新聞に連載され，繰り返し読みました．これがずっと心に残っていて，そういうことからも影響を受けているのではないかと思いますね．

複素解析を専門にした理由は複素解析のほうが自分にとっては記述が非常に簡明で，かつ述べられている定理が素晴らしいと感じたからではないかと思います．

また，友人たちとの勉強会や私の先生からも多くの影響を受けました．

私の先生は小澤満先生だったのですが，専門は一変数関数論で私のいまやっていることとは少し違うのですが，論文を読むのにつきあっていただきました．先生は論文を読むと，必ず問題を５つ

考えてこい，と仰るんですね．4 年生のときの指導も同じで，あるテキストを読み終わった後にしばらくの間，時折思い出しては一緒に考えてくれましたね．

今思うと，そのときのやり方が研究者になるにあたっての基礎になっている気がしますね．5 つ考えるというのはなかなか大変で最初の 2 つ 3 つくらいはどうでもいいような問題を考えられるのですが，残りを考えるとなるとこれが大変です．それを毎回ですからね．

そのようなことを通じて他の人の論文を読むときは，考え尽くされてないことがあるんじゃないか，と考えながら読む癖がつきました．こうして考えながら読むと，より深く読めるようになるわけです．

5. メッセージ

――研究者を目指す方や学生さんへのメッセージをお願いします．

そうですね．やはり，自分で面白いと思ったことを大事にしてほしいと思います．人からとやかく言われたことでピンとくる場合もありますから，アンテナを張っていたほうがいいですが，基本的には自分が何が面白いかというのを持っていることが重要だと思います．

研究者の中にも自分のやっていることは世界にどの程度いるのか，やっている人でどんな偉い人がいるのかとか気にする人がいるのですが，あまり意味のないことだと思います．やはり自分が面白いと思うことを根気よく諦めずに長く続けていってほしいですね．そうすれば，十分満足する人生を送れるのではないかと思います．

つい先日も 30 年くらい前に考えていた問題が若い人との協同研究で解決しました．そういったこともありますから，解けない問題も頭の片隅に入れておいて自分のモチベーションを常に維持してほしいと思います．

また若い人には，応用的研究にも踏み込んでいってほしいと思います．これは自分ができなかったことでもあるのですが，若い方々への希望です．

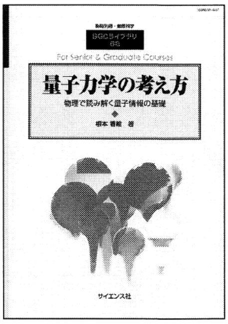
――本日は貴重なお話をお聞かせ下さり，誠にありがとうございました．

(2009 年 2 月，東京大学駒場キャンパス研究室にて)

（のぐち・じゅんじろう，東京大学大学院数理科学研究科）

量子力学の考え方
物理で読み解く量子情報の基礎

根本香絵著，B5 判，136 頁，本体 1829 円，サイエンス社



どの大学の物理学科の学生にとっても，量子力学は避けては通れない科目である．量子力学に直接関わる研究をする予定がなくとも，量子力学の単位を全く取得せずに物理学科を卒業することは，まず不可能であろう．しかし，物理学科から一歩外に出てみると，量子力学を学ぶ機会は激減してしまい，通常のカリキュラムで量子力学に触れることは難しくなってしまう．このような，ある分野では一般教養として共有されている知識が，その分野外ではほとんど知られていない，というギャップは，主に２つの理由があって生じるのではないかと思う．一つは，その知識を得る動機や必要性の問題である．これまで，他分野の者にとっては，古典力学で十分であるか，量子力学の部分はブラックボックスとして物理学者に任せ，彼らによって導出される結果のみを使えば十分であったのだろう．もう一つは，知識獲得のために必要な努力量の問題である．物理学科で用いられている通常の量子力学の教科書は，量子力学の歴史的な発展の順序に沿ったものが多く，歴史的発展の背景となる解析力学や特殊関数，微分方程式など物理数学の各科目も合わせて学ぶ必要があり，量子力学を学ぶためには多くの準備を必要とする．

しかしながら，近年の科学技術の発展によって，我々は量子力学を用いないと記述されない世界を操るための道具を手に入れつつある．そのような道具を使えば何が可能となるのか，そしてそのような装置をどう実現するのか，ということを考えるのは，物理学者だけの仕事ではなくなってきた．物理学者以外の者にとっても，少なくとも量子力学の本質を知る必要が生じており，量子力学を学ぶ動機が強まってきている．本書は，そのような読者のために，物理学科で何年もかけて行う準備を経ずに，最近脚光を浴びている量子計算や量子暗号などの量子情報処理の系を例として，量子力学の本質を解説する画期的な教科書である．

本書の特徴は，量子力学は古典力学とどのように異なるのか，ということに焦点をあてて，古典力学に慣れた者の直感に反することもある量子力学の本質をあぶり出していることにあると思う．通常の量子力学の教科書では，シュレディンガー方程式の導入後に，井戸型ポテンシャル中の粒子，調和振動子，中心場中の粒子，水素原子などについて，微分方程式を解いてシュレディンガー方程式の解を求めるという作業が続く．多くの場合は特殊関数を用いなければならず，物理学科の学生の中には，量子力学とは難しい特殊関数を用いて微分方程式を解くプロセスであると誤解し，このプロセスに注意を払うあまりに，導き出された解の量子力学的な性質を精査する余裕がないことが，案外多いようである．

しかし本書では，扱う系を量子情報処理の系に限ることで，読者をこのような罠にはまらせずに量子力学の本質へと導く．また，現在の科学技術が可能とした量子力学系への操作という観点からは欠かすことのできない測定，ノイズのある系における時間発展，そして，エンタングルメントの性質について，それぞれわかりやすい例を挙げて量子力学特有の性質を解説している．これらの項目は，従来の量子力学の教科書には含まれていないことが多い事項であるが，量子力学の本質の理解という点からも，その応用という点からも，これから量子力学を学ぶ者には理解するべき必須の事項であろう．さらに最終章では，それまでに示した知識の総集として，量子計算の仕組みにスムーズにたどり着くことができるようになっている．

量子力学はこれまで，分野外の者が学ぶ場合のハードルが高く，難しそうな学問というイメージがあったかもしれない．難しい量子力学を操ることのできる賢い物理学者，というイメージは，物理学者にとっては好都合だったのかもしれないが，科学技術の発展によって量子力学がより身近な存在になった現代では，物理学科の学生や卒業生だけの知識にしておくべきではないと思う．本書によって，量子力学の本質に気づく余裕がなかった物理学科の学生や卒業生も含めて，より多くの人々が量子力学の知識を共有し，その本質の面白さを発見することに期待する．

村尾　美緒（東京大学大学院理学系研究科）

「数理科学」は語る

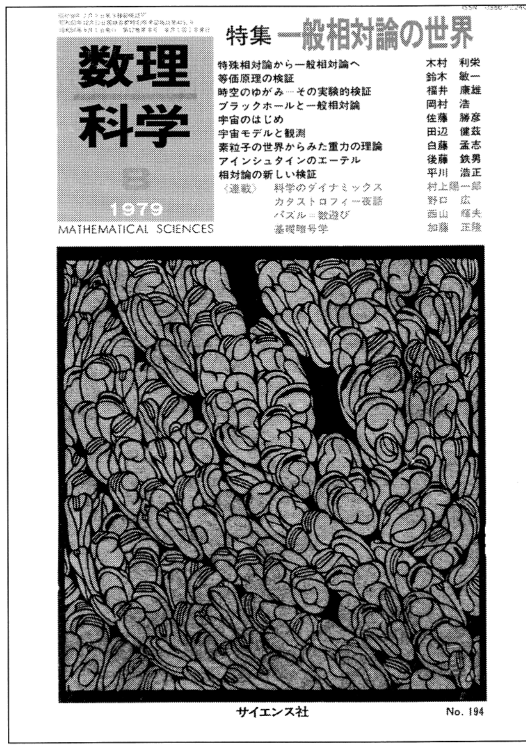
30年前から現代へのメッセージ

佐藤　勝彦

1979年8月号

30年前の8月号は「一般相対論の世界」の特集である．一般相対論の実験的，観測的検証などが主なテーマで，当時の雰囲気が懐かしく感じられる．しかし私の書いた「宇宙のはじめ」は，素粒子的宇宙論に関するもので，全く異質な宇宙初期における「真空の相転移」について書いたものである．私は当時，大きく進んだゲージ理論に基づく力の統一理論に基づいて宇宙の初期や誕生の研究ができるのではないかと考え，初期宇宙の研究を始めていた．着目したのは統一理論を作るために用いられた「真空の相転移」である．真空の相転移の概念はもちろん2008年ノーベル賞に輝いた南部先生の業績である．それを使って電弱力の統一理論や大統一理論が作られている．宇宙初期では超伝導体が温度の上昇により常伝導状態に還るようにゲージ対称性が回復すると考えられる．

ヒッグス粒子の質量の値が小さいとき，ヒッグスポテンシャルには輻射補正により対称状態と破れた状態の間に小さな山が生じ，相転移は1次となる．この短い解説の中に8枚ものヒッグスポテンシャルと対称性の破れの図が載せてある．その一つとして，もしヒッグス質量が6.9 GeVより小さいと相転移は宇宙では起こらず，Wボソンや Zボソンは質量ゼロのままに止まり現実世界と矛盾するというA.D. Lindeの研究なども紹介した．この解説は8月号に掲載されているが書かれたのはその年の3月である．実は原稿を書いた直後の4月に大統一理論の予言する相転移が1次ならば，宇宙は指数関数的に膨張し地平線が急拡大することに気づいた．今日A.H. Guthの巧みなネーミングでインフレーション理論として知られているものである．5月には研究室のサブグループのミーティングでも1次相転移による指数関数的宇宙膨張の研究について発表したが，宇宙初期での真空の相転移の研究をやっている研究者は世界でもほとんどいない状態だったので急いで発表する必要も感じなかった．実際，インフレーションに関する第1，第2論文を書き上げたのは翌年の2月，第3の論文を投稿したのは7月であった．いずれもGuthの論文が投稿された8月より早いものの，もう少し発表しておくべきだったと悔やまれる．

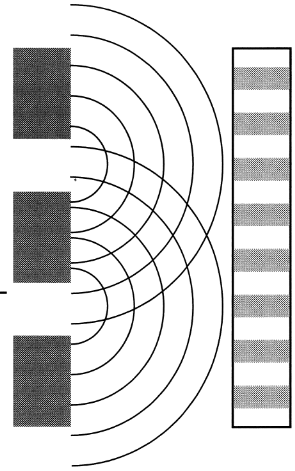


過ぎ去ったことに「もしも」，という話は意味がないが，この特集が1カ月遅かったならば，1次相転移による宇宙の指数関数的膨張を本誌に書いたことは間違いないだろう．

（さとう・かつひこ，明星大学客員教授，
東京大学数物連携宇宙研究機構特任教授）

目で見て学ぶ量子力学

第12回 実験でひもとく量子の不思議



電子波の位相を考える

外村　彰

12.1 はじめに

干渉性の良い電界放出電子線の出現によって，電子の波動性を利用した観察手法“電子線ホログラフィー”や，計測手法“干渉顕微鏡”が実現し，ミクロな電磁場の情報が得られるようになった．

今回は，電子波にとって最も重要な物理量である“位相”について，基本から考えてみよう．

12.2 電子波の位相

平面電子波を電磁場に当てて，透過した電子波の波動関数 Ψ を考えよう．Ψ は，一般に

$$\Psi = R\exp\left(\frac{\mathrm{i}S}{\hbar}\right) \qquad (12.1)$$

と2つの実数の関数 R と S で表すことができる．R は波動関数の振幅，$\frac{S}{\hbar}$（$\hbar$：プランク定数）は“位相”である．電子波の干渉実験では，ミクロの電磁場の効果は弱く，入射電子線の軌道が曲がることはほとんどない．せいぜい，向きが少し変わるくらいである．この場合，振幅 R は一定で，位相 S のみが電磁場によって影響を受ける．いわば，電磁場は電子波にとって，“位相物体”である．

S は，量子力学で重要な役割を果たすだけでなく，古典力学にも顔を出し，解析力学[傍注1]における“作用”[傍注2]と呼ばれる量に対応する．ハミルトン・ヤコビの方程式[傍注3]で，“粒子がポテンシャル中を運動するときの軌道”は，“光線が屈折率が与えられた物質中を進むときの軌道”とそっくり同じ形をしている．粒子があたかも波として振舞うかのようである[1]．S は，片や“粒子の作用”であり，片や“波の位相”として，両者に共通の物理量になる．E. シュレ

[傍注1]　ニュートンの運動方程式では，質点に力を加えると，それが加速度になって質点の運動が微分方程式で求められる．もっと一般的な物体の運動を一般化座標を用いて取扱うのが解析力学である．

[傍注2]　作用は，(12.1)式からも分かるようにプランク定数 $\hbar$ と同じ [(エネルギー) × (時間)] の次元をもつ．古典力学での作用は $\hbar$ とは関係ないが，量子力学になって電子波を考えるときに，ド・ブローイの式 $\lambda = \frac{h}{p}$ で h が導入され $\left(\hbar = \frac{h}{2\pi}\right)$，電子波の位相が $\frac{S}{\hbar}$ で与えられることになる．S は光学では“アイコナール”と呼ばれる．

[傍注3]　W.R. ハミルトンと K.G. ヤコビが古典力学を一般的に取扱うために作った式を，ハミルトン・ヤコビの方程式と言う．粒子の運動を記述しているにも拘わらず，光の波動理論と極めて似た形をしている．量子力学における粒子の波動性を暗示しているかのようである．“作用 S が一定になる曲面”が，波動光学での波面に対応する．

ディンガーは，この理論を電子の波動方程式を見出すための手がかりにして量子力学を作っていく[傍注4]．ちょうど同じ頃，電子レンズが発明され，電子軌道やレンズ収差を解析する上で，ハミルトンの原理が有効に使われることになる．

そこで，量子力学にとっても，電子レンズに対しても重要な“作用”を，古典力学と量子力学の両面から勉強し，“電子波”の理解に備えることにしよう．

［傍注 4］ L. ド・ブローイは，電子の波動仮説を提唱するとき，同じフランス人が考案した光のフェルマーの原理や粒子のモーペルチュイの原理からヒントを得た．

12.3 波の波面

水面の波紋（波面）は，肉眼で直接観察することができる．水面の高さがピークになる点を連（つら）ねると“波面”（等位相面）ができる．

ところが，電子の波面は，目で見ることはおろか，どんな手段を使っても観察できない．そもそも電子波を表す波動関数は，原理的に観測不可能である．しかし，波面は電子波の最も重要な情報なので，少なくとも頭の中で，そのイメージを捉えておきたい．

電子と同様，光の場合にも，波面を直接見ることはできないが，光の実体は，“振動する電磁場”なので，波面に物理的意味合いを持たせることはできる．そこで，より身近な光を手がかりにしながら，電子の波面を考えていこう．

光の波面は，“光線群に直交する曲面”として定義され，幾何光学と波動光学を仲立ちする概念として用いられてきた．幾何光学は，マックスウェル方程式の中に出てくる媒質定数 ε, μ が，光の波長に比べて充分に長い距離で変化する場合を扱う．光は光線から成り立つものと考えることができ，光線の進み方を研究する．真空中を通る光線は，一定の速度 c で，一直線状に進む．媒質が一様でないときの光線の軌道は，各点 $\boldsymbol{r}$ での光線速度で決まる．光線の速度[傍注5]は，屈折率 $n(\boldsymbol{r})$ が与えられると，$c/n(\boldsymbol{r})$（c は光速）として与えられる．

「屈折率 $n(\boldsymbol{r})$ の空間分布が与えられたとき，光線の軌道はどのようにして決まるのだろうか？」—P. フェルマー（P. Fermat）は，「光線は，所要時間が最小になる軌道をたどる」という“フェルマーの原理”を見出した．確かに，一様な媒質中を通る光線は速度が一定なので，最小時間は最短距離と同等になり，直線軌道をたどる．一般の媒質の場合には，速度が場所毎に変わってくるので，そう簡単にはいかない[傍注6]．

ここでフェルマーの原理を数式にしておこう．光線が最小時間で A から B に至るには，屈折率 $n(\boldsymbol{r})$ の通り路に沿っての線積分 $\int n(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}s$ が最小値をとる[傍注7]．これを数式にすれば，

$$\delta \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} n(\boldsymbol{r})\mathrm{d}s = 0 \tag{12.2}$$

となる．何故なら，媒質中での光の速度 $v(\boldsymbol{r})$ は $c/n(\boldsymbol{r})$ なので，$\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = v(\boldsymbol{r})\mathrm{d}t = (c/n(\boldsymbol{r}))\,\mathrm{d}t$ となり，$\int n(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}s = c\int_{t_\mathrm{A}}^{t_\mathrm{B}}\mathrm{d}t = c(t_\mathrm{B} - t_\mathrm{A})$ になる．$t_\mathrm{B} - t_\mathrm{A}$ は A から B に至る時間なので，この時間が最小になればよいので，“最小時間の原理”になる．$c(t_\mathrm{B} - t_\mathrm{A})$ は，その時間内に光が真空中を進む距離に

［傍注 5］ ここでいう速度は，波面の速度，位相速度である．

［傍注 6］ 光線が，真空中を A から B まで進むとき，速度が一定なので，“最小時間で到達する軌道”は，“最短距離”と同等になって，光線の軌道は AB を結ぶ直線になる．ところが，真空中の点 A から水中の点 B に進む場合には，A と B が水面に垂直な直線上にある場合以外は，軌道は直線ではなく，折れ線になる．光線は真空中では光速 c で走るが，水中では c/n（$n = 1.33$）と遅くなる．このため，最短の時間で A から B に到着するには，真空中で B に近づいてから水中に潜った方が得策である．これを，きちんと計算すれば，屈折率の異なった界面を通る光の屈折の法則が得られる．

［傍注 7］ 実際には，光線の所要時間が停留値をとる軌道が実現する．この軌道から，わずかに軌道をずらしても，所要時間はほとんど変化しない．

等しくなるので“光路長”と呼ばれている．フェルマーの原理は「光路長を最小にする軌道が実現される」と言いかえることができる．

「A から B に進む光は，常に最小時間でたどりつく軌道を選ぶ」というのであれば直感的にも分かりやすいが，(12.2) 式では，最小値だけでなく最大値や変曲点をとる場合も含む．実は，(12.2) 式の方が正しいことになる．

かくして，屈折率の空間分布 $n(\boldsymbol{r})$ が分かれば，光線の軌道がフェルマーの原理によって決まる．そして，波面は，軌道に直交する面として求められる[傍注8]．ただ A から B に至る軌道が 1 本決まっただけでは，広い波面を描くことはできない．B を動かしたときに，一群の軌道ができるが，それらに直交する曲面として，波面が決まることになる[傍注9]．

光の場合に，軌道と波面の関係が分かったので，いよいよ電子の場合について考えてみよう．

「電子の場合，波面を物理的に定義することはできなくても，光と同じように，軌道に直交する面として定義できるのだろうか？」—結果を先に言うと，電子が電場の中を通るときには，軌道と波面は直交するが，磁場の中を通るときには，電子軌道と波面は必ずしも直交しない．

そこで，まずは，電子軌道を復習し，次いで波面と軌道の関係を考えよう．

12.4 電子軌道

電子がたどる道 $\boldsymbol{r}(t)$ は，ニュートンの運動方程式から求めることができる．

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -e\boldsymbol{E} - e(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}). \tag{12.3}$$

電子に働く“力”を仲介せずに，“ハミルトンの原理”[傍注10]に基づく変分形式から $\boldsymbol{r}(t)$ を直接求めることもできる．話を電子線干渉実験に限定すれば，この変分法は光の伝播を決めるフェルマーの原理と全く同じ形にすることもできる．

数式が少し複雑になるが，変分法を使って電子の運動を決める式を挙げておこう．

$$\delta S = \delta\int_{t_\mathrm{A}}^{t_\mathrm{B}} L\mathrm{d}t = 0, \tag{12.4}$$

$$L = \frac{mv^2}{2} + e\phi - e\boldsymbol{v}\boldsymbol{A}. \tag{12.5}$$

作用 S は，ラグランジアン L の時間積分で与えられる．L は，直感的な説明を行いにくいが，今の場合，運動エネルギー T からポテンシャルエネルギー V を引いた $T-V$ で与えられる．

「A から B に至る電子の運動 $\boldsymbol{r}(t)$ は，作用 S が停留値を取る条件として決まる.」—これが“ハミルトンの原理”である．この変分原理からニュートンの運動方程式が導入されるだけではない．驚くべきことに，電磁気や重力場の方程式までもが同じ形式で導き出せる．勿論，それには，ラグランジアン L に (12.5) 式ではなく，各々適切な式を与える．

[傍注8] 後に示すように，電子の波面は (12.7) 式 $\mathrm{grad}\ S = m\boldsymbol{v} - e\boldsymbol{A}$ で決まる．光線の波面も似た形で与えられる．すなわち $(\mathrm{grad}\ S)^2 = n(\boldsymbol{r})^2$ である．幾何光学における作用 S はアイコナールと呼ばれる．詳細は文献 1) の 188 頁参照．

[傍注9] バラバラな方向を向いた直線から波面を作ろうと思っても，必ずしも連続的な波面を作ることはできない．例えば，1 点から放射状に出た光線ならば，球面状の波面を描くことができる．

[傍注10] “ハミルトンの原理”に初めて出会ったのは，大学 2 年の，山内恭彦先生の“一般力学”の講義であった．難しくて，何故こんなに一般化した形で体系化しなければならないのかと思った．どんな座標でも同じ式になるので便利だが，物理的イメージが沸いてこなかった．とくに，作用とかラグランジアンといった重要な量が，物理的に何を意味するのか理解できなかった．ただ，「ラグランジアンを経路に沿って積分した作用 S が最も小さな値を取る経路が現実の電子の軌道になる.」というハミルトンの原理は神秘的だった．後に R.P. ファインマンの経路積分による量子力学の定式化を知って，さらに興味が増した．

大学を卒業して「電子の波を使って，ミクロの世界を見る」のが私の仕事になったので，電子の波の位相に否応なしに関心を持たざるを得なくなった．必要が生じるたびに，何度も勉強しようと思い立ったが，今もって充分に理解できたとは言えない．

この変分原理は，広い分野に適用でき自由度もたくさんあるものの，一般的すぎて物理的イメージを浮かべにくい．そこで，もっと直感的に理解するために，電子線干渉実験に的を絞って，観察対象を時間変化しない電磁場とし，変分もエネルギーが保存される道に限ることにする．

(12.4) 式では，作用 S は A 点から B 点に至る時間積分で与えられるが，この S を時間積分ではなく線積分の形に焼き直し，フェルマーの原理 (12.2) 式と同じ形にすることができる．本来，フェルマーの原理では，時間とは関係がなく軌道だけが決まるので，ハミルトンの原理と関連づけることはできない．

ハミルトンの原理からは各時刻における電子の位置 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{t})$ が得られる．しかし，上記のように限定された条件下では，屈折率 n を使って (12.4) 式中のラグランジアン L を nv で置き換え，フェルマーの原理 (12.2) 式と同じ線積分の形に変換することができる．これが "最小作用の原理" である．

このとき，電子の屈折率 n は次のように与えられる[2)]．

$$n(\boldsymbol{r},\boldsymbol{t}) = \frac{1}{\sqrt{2me\phi_0}}\{mv - e\boldsymbol{t}\boldsymbol{A}\}$$
$$= \sqrt{1+\frac{\phi(\boldsymbol{r})}{\phi_0}} - \sqrt{\frac{e}{2m\phi_0}}\boldsymbol{t}\boldsymbol{A}. \qquad (12.6)$$

ここで，e，m，ϕ_0 は，それぞれ電子の電荷絶対値，質量，加速電圧，v は電子の速度，$\boldsymbol{t}$ は軌道の接線ベクトル（$\boldsymbol{v}/v$）そして $\phi_0+\phi$ は $\boldsymbol{r}$ での電子の加速電圧である[傍注11]．

この式から，電子の屈折率が，磁場のない場合（$\boldsymbol{A}=0$）には，ごく簡単に，$n(\boldsymbol{r}) = \sqrt{1+\frac{\phi(\boldsymbol{r})}{\phi_0}} = \sqrt{\frac{\phi_0+\phi(\boldsymbol{r})}{\phi_0}} = \frac{v(\boldsymbol{r})}{v_0}$ と表せる．つまり，n は v に比例している[傍注12]．電子が加速電圧 ϕ_0 の真空中を走っているとき，つまり $\phi(\boldsymbol{r})=0$ の場合には，$n(\boldsymbol{r})=1$ となる[傍注13]．

磁場が存在する場合には，屈折率 n は空間座標 $\boldsymbol{r}$ だけの関数ではなくなる．電子の進行方向 $\boldsymbol{t}$ にも依存し，屈折率は $\boldsymbol{t}\boldsymbol{A}$ の項を含む．この $\boldsymbol{t}\boldsymbol{A}$ は，$\boldsymbol{v}\boldsymbol{A}$ あるいは $\boldsymbol{i}\boldsymbol{A}$（$\boldsymbol{i}$：電子流密度）に比例するが，電子と磁場の相互作用エネルギーを表す項になる[傍注14]．屈折率 n は，光のときには c/v と極めて簡単に定義できたが，電子の場合，分かりにくい量になってしまった．だが，これはラグランジアン L に由来する．電子波を当てることによって，ラグランジアンに由来するこの項も観察可能になる．AB 効果も，ここから生まれる．

さて，電子の場合には，波面と電子軌道の関係は，どうなるのだろうか？ (12.6) 式の屈折率から電子の位相 $S/\hbar$ を求めると，

$$\frac{S}{\hbar} = \frac{2\pi}{\lambda}\int n\mathrm{d}s = \frac{1}{\hbar}\int(m\boldsymbol{v}-e\boldsymbol{A})\,\mathrm{d}s \qquad (12.7)$$

で与えられる．ここで，$\lambda = \frac{h}{mv}$ はド・ブローイ波長．積分は電子軌道に沿って行う．この式を微分形に書き替えると，

$$\mathrm{grad}\,S = m\boldsymbol{v} - e\boldsymbol{A} \qquad (12.8)$$

となる．波面は，等位相面なので，"S が一定になる面" として決まる．この

［傍注 11］ 実際の実験では，電子が放出される陰極の電位を $-\phi_0$ とする．陰極から出た電子が接地電位の領域で ϕ_0 で加速される．観察対象が ϕ の電位にあると，マイナス電荷をもつ電子はさらに ϕ だけ加速される．

［傍注 12］ 光の場合には屈折率は $n=\frac{c}{v}$ で与えられ，速度に逆比例していた．屈折率の式に入れるべき v は，電子の速度ではなく波面の進む速度 "位相速度" であることに留意されたい．

［傍注 13］ V_0 の電位の領域に電子が入ると，マイナスの電荷をもった電子は，さらに V_0 だけ加速されるので，この領域の屈折率は $\sqrt{1+\frac{V_0}{\phi_0}} \fallingdotseq 1+\frac{V_0}{2\phi_0}$ となる．例えば $\phi_0 = 100\,\mathrm{kV}$，$V_0 = 10\,\mathrm{V}$ とすると $n = 1+5\times10^{-5}$ となる．

［傍注 14］ 屈折率の中に入っている $\boldsymbol{t}\boldsymbol{A}$ の項は，分かりにくいと思う．しかし，重要なので，ここで触れておく．3 次元ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を 4 次元に拡張させてみると納得できるかもしれない．A_μ（$\mu = 0,1,2,3$）は $\{\phi,\boldsymbol{A}\}$ で，電流も $i_\mu = (\rho,\boldsymbol{i})$ になる．ρ は電荷密度である．これら 2 つの 4 次元ベクトルの内積は，$A^\mu i_\mu$（$\mu=0,1,2,3$ を加算）となり，$A^\mu i_\mu = \rho\phi - \boldsymbol{i}\boldsymbol{A}$ で表せる．$\rho\phi$ が電荷と電場の相互作用エネルギーであることは理解しやすいと思う．それと同じく，$\boldsymbol{i}\boldsymbol{A}$ は電荷と磁場の相互作用エネルギーなのである．$\boldsymbol{i}\boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{t}\boldsymbol{A}$ に比例する．

実は，$A^\mu i_\mu$ こそが "最小作用の原理" で重要な項となる．実際ラグランジアン L の中にも入っている．さらにこの項がゲージ原理へと導いてくれることになる．

［傍注 15］“一般化運動量” $m\boldsymbol{v}-e\boldsymbol{A}$ は，波動関数の位相 $(S/\hbar)$ の傾きを与える．ゲージ原理では，「位相を各点で勝手に変えても同一の法則が成り立つ」という要請をする．そのためには，電磁場，つまり光 “$\boldsymbol{A}$” が必然的に生まれることになる．

式から，波面は，電子の進行方向 $\boldsymbol{v}$ に対してではなく，一般化運動量[傍注15] $m\boldsymbol{v}-e\boldsymbol{A}$ に直交する面として与えられることが結論できる．波面の間隔，“波長” も，ドブロイ波長 $\frac{h}{mv}$ ではなく，$\frac{h}{|m\boldsymbol{v}-e\boldsymbol{A}|}$ になる．つまり，“波としての電子” を考える場合には，「$m\boldsymbol{v}-e\boldsymbol{A}$ を運動量と見なせ」ということになる．$\boldsymbol{A}=0$，つまり電場だけの場合には，電子軌道と波面は直交する．

それにしても，「何故，光線は “フェルマーの原理” に従い，電子は “最小作用の原理” に従って，軌道を決めるのだろうか？」—原理と言ってしまえばお終いだが，この疑問に最も分かりやすく答えてくれるのは，ファインマンの経路積分の方法である．そこで，量子力学の第 3 の定式化である “経路積分” の考え方を使って “電子波” のイメージを考えておこう．

12.5 電子波を経路積分で考える

ある時刻 $t_{\rm A}$ に A 点にいた電子が，$t_{\rm B}$ で B 点に到着したとする．古典力学では 1 本の軌道 $\boldsymbol{r}(t)$ が決まる．ところが量子力学で決まるのは，軌道ではなく，A から B に至る確率振幅 $K({\rm B, A})$ である．$t_{\rm A}$ で A にいた粒子が，$t_{\rm B}$ で B に存在する確率が $|K({\rm B,A})|^2$ となる．

$K({\rm B, A})$ は A から B に至るあらゆる経路からの振幅の和で表せる．すべての経路が同じ重みで加算される．つまり電子は，ありとあらゆる経路をたどることになる．ただし，電子は波なので，各経路に $\exp\left(\frac{{\rm i}S}{\hbar}\right)$ という位相因子の重みがかかる．原子的尺度のミクロの世界では，S は，プランク定数 $\hbar$ と同じオーダーの量になるので，すべての和をきちんと足す必要があるが，マクロな世界になると S の値が非常に大きくなる．軌道をわずかに変化させただけで，位相 $\frac{S}{\hbar}$ が大きく変化する．このため，ほとんどの経路は互いにキャンセルしてしまう．例えば $\frac{S}{\hbar}$ が π だけ増すと，位相因子 $\exp\left(\frac{{\rm i}S}{\hbar}\right)$ の符号は $-$ になる．隣接した軌道の間で位相 $\frac{S}{\hbar}$ が激しく変化すると，位相因子が $+$ と $-$ をくり返し，それらを加算した振幅 $K({\rm B, A})$ は 0 になってしまう．軌道変化に対して S が停留値を持つ場合だけが例外で，ゼロではなくなる．これが古典的軌道と一致する[傍注16]．つまり，「S が極値を取る軌道が実現する」という最小作用の原理は，プランク定数 $\hbar$ を 0 にした極限で成り立つことになる．

［傍注 16］ S が停留値を取る経路が存在しない場合もある．このとき A から B に行く軌道は存在しない．また，どんな軌道を考えても S が一定になる場合には，A から B に至るすべての道すじが実現することになる．A と B が，レンズの共役な点の場合，それにあたる．

(a) 電子はあらゆる経路を通るのか？

さて，「電子が A から B に行くとき，本当にあらゆる道を通っているのだろうか？」—きっと疑う人もいるだろう．それを確信したい人は，ファインマンの本を読むのが打ってつけである（R.P. ファインマン『光と物質のふしぎな理論』（訳）釜江常好・大貫昌子，岩波書店，2007 年）．

ここでは，ごく簡単な例だけを考えてみよう．

真空中を A から B に至る電子を考える（図 12.1）．“A から B に至る道” はまっすぐな道しか存在しないように思える．「D や E など他を経由する道は，そもそも存在しない.」と思うかもしれない．しかし，そうではない．直線からは

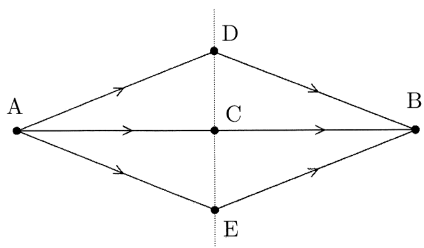


図 12.1　A から B に至る 3 つの経路．

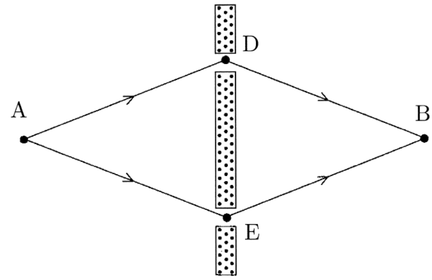


図 12.2　2 つのスリットを通る経路．

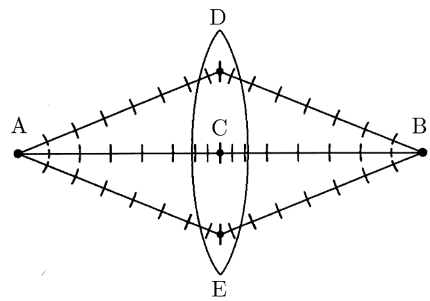


図 12.3　レンズでは，すべての経路が同位相になる．

ずれた経路は打ち消されるだけである．その証拠に，まっすぐに行く道を遮って，D と E だけを通すべく，D と E にスリットをあけてみよう（図 12.2）．A から B に至る長さが，D を通っても E を通っても変わらないときには，A から D と E を経由して B に至る 2 つの電子波は B で同じ位相の値を持つ．こうして 2 つの波は強め合う．これは，二重スリットの干渉実験で実験的に確かめられている．ということは，やはり D や E にも波はやってきていることになる．スリットの間隔を変えれば，スリット面の至る点に波がやってきていることを確かめられる．やはり，電子はあらゆる道をたどっている．

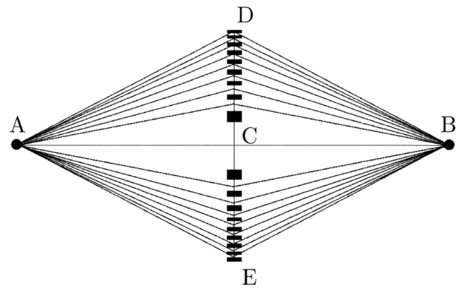
(b) すべての経路を蘇らせるレンズ

それなら，A から B に至る各経路に位相板を挿入して，すべての電子波を同位相にすることはできないだろうか？ そんなことができたら，打ち消し合って消えてしまった波を，手品のように蘇らせることができる．

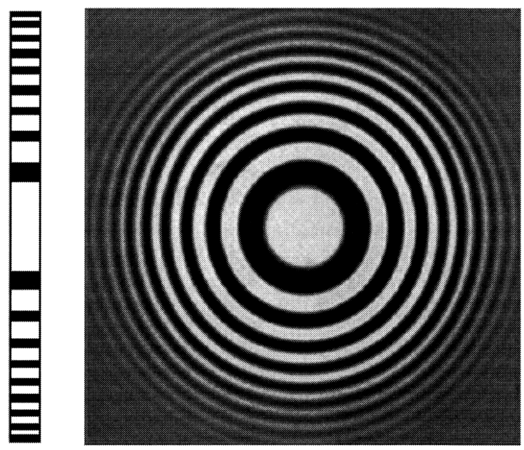
実は，レンズを使えば，A から発したすべての波を B で同位相にすることができる（図 12.3）．通過位置（C, D, E）によって異なってきた光路長を，ちょうど補償するような位相変化をレンズが与えてくれる．このため，A から発したあらゆる波は打ち消されることなく，そのまま B で加算される．これがレンズ作用である．A から出たあらゆる電子軌道が B に集まるだけでなく，位相も同じになるので，レンズで結像すると，像の位相分布も再現することは言うまでもない．

(c) 同位相の波だけを利用するゾーンプレート

A から発した波のうち，B で同位相になる波だけを，“選び出す” ことも可能である．ただ，位相の値が一致する波だけではなく，波長の整数倍だけ位相が変化す



(a)



(b)

図 12.4　ゾーンプレートでは，同位相の波（$0, 2\pi, 4\pi, \cdots$）だけを通す．
(a) 経路，(b) ゾーンプレート．

る波を通して，残りを遮ってしまう（図 12.4 (a)）．スリット状に隙間をあけるのではなく，効率よく光軸 AB に対して軸対称な同心円状の隙間をあける．これは，“ゾーンプレート” と呼ばれている（図 12.4 (b)）．レンズのない X 線では，レンズの代わりに使われている．実は，点物体のガボール型ホログラム（第 11 回で紹介）は，ゾーンプレートになる（図 12.5）．ホログラフィーの結像原理でもある．

(d) 太さを持つ軌道

電子軌道は一本の道をたどるようだが，波長のスケールで見れば，そうではない．電子軌道は，その近傍を通る電子波の助けを借りている．A から B に至る電子軌道は，古典力学では AB を結ぶ直線である．作用 S はこの軌道に対して停留値を持つ．しかし，ミクロに見れば電子軌道は太さのない直線ではない．その証拠にその軌道だけを通す “ごく小さなピンホール” を置いてみよう（図 12.6）．ピンホールを置かないときには，A から B へと一直線にやってきた電子は，波長より小さなごく小さなピンホールを置いて一本だけを通そうとすると，直線ではなくなってしまう．電子は四方八方に広がってしまい，直線上にない B′ にもやってくる．どうしてかと言うと，充分に小さなピンホールの中を通るすべての経路は，B′ であれ他の点であれ，波長に比べ，ほぼ同じ長さになる．ピン

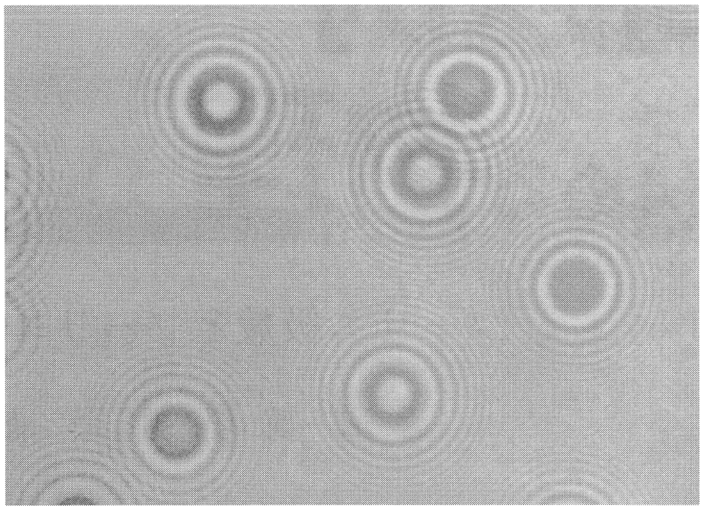


図 12.5　小さな孔を有する薄膜のガボール型電子線ホログラム（大きくピントをはずした像）．ガボール型ホログラムはゾーンプレートからなっている．

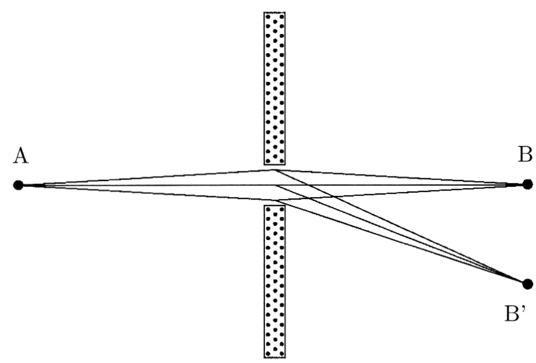


図 12.6　小さなピンホールを通る電子．

ホールの中を通り，B' に至るすべての波は，同位相になるからである．電子は一直線に進むイメージが強いが，それはド・ブローイ波長が短いからに過ぎない．

原子の中のようなミクロの領域での話になれば，今までの話は通用しない．A から B に至るあらゆる経路に沿っての作用 S は $\hbar$ と同じ程度の大きさになるので，すべての位相因子 $\exp\left(\frac{iS}{\hbar}\right)$ をきちんと加算しなければならない．こうして経路積分の考え方で計算した結果は，シュレディンガー方程式による結果と同等になる[傍注17]．

[傍注 17]　正確なことを言うと，過去のすべての点からの経路積分の振幅の和を求めると，それがシュレディンガー方程式の波動関数と同じになる．

こんな考え方をすれば，電子波の直観的なイメージが，少しは浮かんでくるのではないか．

参考文献

1)　江沢洋：『解析力学』（培風館，2007）177–192.
2)　W. Ehrenberg and R.E. Siday: “The Refractive Index in Electron Optics and the Principles of Dynamics” *Proc. Phys. Soc.* **62** (1949) 8.

（とのむら・あきら，日立製作所フェロー／理化学研究所グループ・ディレクター／沖縄科学技術研究基盤整備機構代表研究者）

問題例で深める物理 Problem Answer Discussion 第7回

フーリエ級数とフーリエ変換

香取 眞理・中野 徹

今回の目的は**フーリエ級数展開**と**フーリエ変換**が，物理学においてとても大切な概念であり，問題解決の強力な手法を与えることを示すことである．フーリエ級数展開とフーリエ変換を用いて具体的な物理の問題を解いてみよう．「解答」には**複素積分**や**グリーン関数法**なども登場して少し難解に思うかも知れないが，実戦力を身につけてほしい．最後にフーリエ変換を通じて量子力学における**不確定性原理**を論じてみる．

7.1 フーリエ級数

地球上のある地点での温度変化の観測データが与えられたとする．当然，周期が 1 日と 1 年の変動が最も顕著であろう．しかしそれ以外に周期 11 年の太陽活動による影響も見られるかも知れない．こういった様々な**周期現象**をデータから抽出するには，温度変化を**三角関数**で表すのが便利である．

周期 2π の関数 $f(x)$ は正弦関数（Sin 波）と余弦関数（Cos 波）を用いて次の式のように展開することができる：

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k \cos kx + b_k \sin kx\Big). \tag{7.1}$$

確かに，$n = \pm1, \pm2, \cdots$ に対して $f(x) = f(x + 2n\pi)$ となる．

問題 7.1　関数 $f(x)$ が (7.1) 式のように展開できるとする．このとき係数 a_k, b_k は周期関数 $f(x)$ を用いてどのように与えられるか．

解答　(7.1) 式に $\cos kx$ と $\sin kx$ を掛けて，それぞれ区間 $[-\pi, \pi]$ で積分する．三角関数の加法定理から得られる

$$\cos nx \cos kx = \frac{1}{2}[\cos(n-k)x + \cos(n+k)x]$$

といった公式と積分公式

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos px\, dx = 2\pi\delta_{p0}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin px\, dx = 0$$

（ただし p は整数）を用いると，係数に対して

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx,\ k = 0, 1, 2, \cdots, \tag{7.2}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx,\ k = 1, 2, \cdots \tag{7.3}$$

という表式が導かれる．■

(7.1) を**フーリエ級数展開**，a_k, b_k を**フーリエ係数**と言う．また，$k = 0, 1, 2, \cdots$ でラベルされた各項を**フーリエモード**と言う．

問題 7.2　区間 $-\pi < x \leq \pi$ で $f(x) = x$ で与えられる周期 2π の周期関数のフーリエ係数を求めなさい．

解答　前問で求めた (7.2) と (7.3) の公式を適用

する．$f(x)$ は奇関数であるので，すべての k に対して $a_k = 0$ である．他方，b_k は

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x \sin kx dx = \frac{2(-1)^{k-1}}{k},$$

$k = 1, 2, \cdots$ と定まる．■

問題 7.2 で扱った周期関数 $f(x)$ は**不連続関数**である．実際，$\varepsilon > 0$ として

$$f(\pi + 0) \equiv \lim_{\varepsilon\to 0} f(\pi+\varepsilon) = -\pi,$$
$$f(\pi - 0) \equiv \lim_{\varepsilon\to 0} f(\pi-\varepsilon) = \pi$$

であり，$x = \pi + 2n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ で大きさ 2π の飛びがある．このような不連続な周期関数に対しては，(7.2) と (7.3) で求めたフーリエ係数を代入して得られる (7.1) の右辺，つまり $f(x)$ のフーリエ級数展開は，元の $f(x)$ と不連続点では一致しない．一般に，$f(x)$ が $x = x_0$ で不連続である場合には，フーリエ級数展開の x_0 での値は，$f(x_0+0) = \lim_{\varepsilon\to 0} f(x_0+\varepsilon)$（これを x_0 での右極限と言う）とも $f(x_0-0) = \lim_{\varepsilon\to 0} f(x_0-\varepsilon)$（これを x_0 での左極限と言う）とも異なり，その平均値 $[f(x_0+0)+f(x_0-0)]/2$ に等しいのである．これを**ディリクレの定理**[1]と言う．今の場合は，$x = \pi + 2n\pi$ が不連続点で，そこでの級数の値は $[f(\pi+0)+f(\pi-0)]/2 = -\pi+\pi = 0$ である．したがって，$f(x)$ のフーリエ級数展開は，$-\pi < x \le \pi$ では

$$2\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}\sin kx}{k} + \cdots\right]
= \begin{cases} x & (-\pi < x < \pi) \\ 0 & (x = \pi) \end{cases} \tag{7.4}$$

となることになる．

フーリエ級数展開 (7.1) でフーリエモード k についての和を N で打ち切ると，もとの関数 $f(x)$ とどれだけ異なるかを見ておこう．問題 7.2 の関数に対して，図 7.1 に $N = 4$, $N = 10$ までの和ともとの関数を区間 $[-\pi, \pi]$ において重ねて描いた．$N = 4$ と $N = 10$ の場合ともに，端（$x = \pm\pi$）では零になっていて，確かにディリクレの定理に従っていることが分かる．

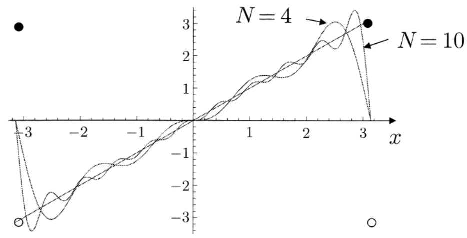


図 7.1　問題 7.2 の $f(x)$ と N 個の Sin 波による近似．

7.2 複素表示

フーリエ級数展開 (7.1) には一つ欠点がある．それは sin を微分すると cos に，cos を微分すると sin に変わってしまうことである．微分しても関数形が変わらないようにできないだろうか．**オイラーの公式**

$$e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx \tag{7.5}$$

を思い出そう．左辺の e^{ikx} の微分は単に e^{ikx} を ik 倍するだけで得られる．(7.1) の代わりに，複素指数関数 e^{ikx} で展開すれば良さそうである：

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}. \tag{7.6}$$

問題 7.3　複素指数関数によるフーリエ級数展開 (7.6) を (7.1) から導き，このときのフーリエ係数は

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \tag{7.7}$$

で与えられることを示しなさい．

解答　オイラーの公式から得られる

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \quad \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$$

を (7.1) 式に代入すると，(7.6) 式が得られる．ただし，$b_0 = 0$ として

$$c_k = \begin{cases} (a_k - ib_k)/2, & k \ge 0, \\ (a_{-k} + ib_{-k})/2, & k < 0 \end{cases}$$

である．$k \geq 0$ の表現に (7.2) と (7.3) を代入すると，(7.7) が得られる．$k < 0$ に対しても結果は同じである． ■

(7.6) の両辺を x で微分すると，

$$\frac{df(x)}{dx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} ikc_k \mathrm{e}^{ikx}$$

となる．展開に用いる関数は e^{ikx} のままであり，フーリエ係数が $c_k \to ikc_k$ と変化するだけになる：

$$f \iff c_k, \quad \frac{df}{dx} \iff ikc_k. \tag{7.8}$$

以下に示すように，この単純な対応関係が微分方程式を解く際に威力を発揮する．

7.3 フーリエ変換

今までは周期が 2π の関数に限定したが，周期は何でもよい．周期が L のときは (7.6) と (7.7) をそれぞれ

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{i2\pi kx/L}, \tag{7.9}$$

$$c_k = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\mathrm{e}^{-i2\pi kx/L}dx \tag{7.10}$$

のようにすればよいのである．こうすれば確かに $f(x+nL) = f(x), n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$ であり，周期 L の周期条件を満たす．

さて，$c_kL = a_k$ と置き換えて

$$f(x) = \frac{1}{L}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \mathrm{e}^{i2\pi kx/L},$$

$$a_k = \int_{-L/2}^{L/2} f(x)\mathrm{e}^{-i2\pi kx/L}dx$$

として，周期 L を無限大にしてみよう．新しく離散変数 $q = 2\pi k/L$ を定義する．変数 q の間隔 $\Delta q = 2\pi/L$ は $L \to \infty$ で零に収束するので，k に関する和は q に関する積分に収束する．a_k を改めて $\widehat{f}(q)$ と書くと

$$\widehat{f}(q) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-iqx}dx, \tag{7.11}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(q)\mathrm{e}^{iqx}dq \tag{7.12}$$

のような積分表示が得られる．

(7.11) を関数 $f(x)$ の**フーリエ変換**，(7.12) を**フーリエ逆変換**と呼ぶ．また，e^{-iqx} や e^{iqx} を**フーリエ因子**と言う．関数を実空間で表したのが $f(x)$，波数 q の空間（これを**フーリエ空間**と言う）で表したのが $\widehat{f}(q)$ である．両者は変換公式 (7.11), (7.12) で互いに関係付けられている．

7.4 周期的電荷分布による静電ポテンシャル

この節ではフーリエ級数とフーリエ変換を用いて電磁気学の問題を解いてみる．

問題 7.4 電荷密度 λ の無限長の線電荷が平面上に等間隔 a で平行に並んでいる．全空間でのポテンシャルを求めなさい．

解答 図 7.2 のように，$z = 0$ の x–y 面上に線電荷が y 軸に平行に等間隔 a で並んでいるものとする．静電ポテンシャル $\varphi(x,y,z)$ は y にはよらない．x の方向に間隔 a で並んでいるので，$-a/2 < x \leq a/2$ で定義された系が周期 a で繰り返されていると見なすことができる．$-a/2 < x \leq a/2$ での $\varphi(x,z)$ に対する 2 次元のポアッソン方程式は，

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi(x,z) = -\frac{\lambda}{\varepsilon_0}\delta(x)\delta(z) \tag{7.13}$$

である．

まず x 方向での周期性を利用して，(7.9), (7.10) を適用し，(7.13) を周期 a のフーリエ級数で表す．オイラーの公式 (7.5) を用いると，x の反転に対

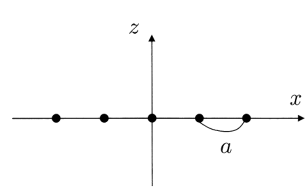


図 7.2 等間隔に並んだ線電荷．

して対称になっているので，sin の項は消える．

$$\varphi(x,z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(z)\cos k_n x, \tag{7.14}$$

$$A_n(z) = \frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2} \varphi(x,z)\cos k_n x dx. \tag{7.15}$$

ここで $k_n = 2\pi n/a$ である．また

$$\delta(x) = \frac{1}{a}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos k_n x \tag{7.16}$$

である．(7.14) と (7.16) を (7.13) に代入して，$\cos k_n x$ の直交性を用いると，任意の整数 n に対して

$$\frac{d^2 A_n(z)}{dz^2} - k_n^2 A_n(z) = -\frac{\lambda}{\varepsilon_0 a}\delta(z) \tag{7.17}$$

が成り立てばよいことになる．

まず $n=0$ に対して考えよう．$k_0 = 0$ なので

$$\frac{d^2 A_0(z)}{dz^2} = -\frac{\lambda}{\varepsilon_0 a}\delta(z). \tag{7.18}$$

$z \neq 0$ では右辺が零になるので，このときは $A_0(z)$ は z の 1 次関数である．ポテンシャルの基準はどこに選んでもよいので，

$$A_0(z) = \begin{cases} -E_0 z & z > 0, \\ E_0 z & z < 0 \end{cases} \tag{7.19}$$

としてよい．係数 E_0 を決めるために，ε を正の微小量として，(7.18) を $z=-\varepsilon$ から ε まで積分する：

$$\left.\frac{dA_0(z)}{dz}\right|_{z=\varepsilon} - \left.\frac{dA_0(z)}{dz}\right|_{z=-\varepsilon} = -\frac{\lambda}{\varepsilon_0 a}.$$

これに (7.19) を代入すると，$E_0 = \lambda/(2\varepsilon_0 a)$ と定まる．

$n \neq 0$ のときの $A_n(z)$ はどうであろうか．(7.17) を (7.11) に従ってフーリエ変換をする：$A_n(z) \to \widehat{A}_n(q)$．(7.8) の対応関係を用いると

$$\widehat{A}_n(q) = \frac{\lambda}{\varepsilon_0 a}\frac{1}{q^2 + k_n^2}.$$

したがって (7.12) より，

$$A_n(z) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{q^2+k_n^2}\mathrm{e}^{iqz}dq. \tag{7.20}$$

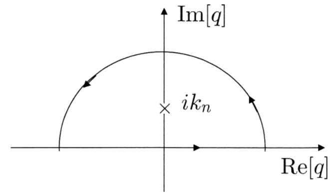


図 7.3　q の複素面上での積分．

積分変数 q を複素数に拡張して，図 7.3 のように，実軸上の積分路に半径無限大の半円を上半面に付け加える．$z>0$ とすれば，半円上での積分は零である．したがって (7.20) の積分は図 7.3 の閉じた積分路での複素積分に置き換えられる．極 $q = ik_n$ による**コーシー積分**は

$$A_n(z) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\frac{\pi}{k_n}\mathrm{e}^{-k_n z} = \frac{E_0}{k_n}\mathrm{e}^{-k_n z}$$

となる．$z<0$ では，上式で $z \to -z$ としたものが得られる．(7.19) の結果と合わせて (7.14) に代入すると

$$\varphi(x,z) = -E_0|z| + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2E_0}{k_n}\mathrm{e}^{-k_n|z|}\cos k_n x$$

という答が得られる．線電荷が配置されている平面の遠方では第 1 項が，近傍では第 2 項が支配的である．■

7.5 拡散方程式

空間と時間の両方の変数が現れる例として，**拡散方程式**を考えよう．

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - \kappa\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = 0, \quad t \geq 0. \tag{7.21}$$

簡単のために 1 次元を考えることにする．κ を**拡散係数**と言う．

時刻 $t=0$ での温度場 $\theta_0(x)$ が与えられているとき，任意の時刻 $t>0$ での温度場 $\theta = \theta(x,t)$ はどのように定めることができるであろうか．拡散方程式は θ に関して線形であるので，初期のいろいろの点での温度場の**重ね合わせ**で表される．$G(x,t)$ を拡散方程式の**グリーン関数**とする：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \kappa\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)G(x,t) = \delta(x)\delta(t). \tag{7.22}$$

すると，時刻 t での点 x での温度場は時刻 $t=0$ での点 x' 近傍での温度場から $G(x-x',t)\theta_0(x')dx'$ だけ影響を受けるので，これを重ね合わせることにより

$$\theta(x,t)=\int G(x-x',t)\,\theta_0(x')dx'. \quad (7.23)$$

が得られる．

時間と空間の両変数を考える場合のフーリエ逆変換は，次のように定義される：

$$G(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}dk\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\, g(k,\omega)\mathrm{e}^{i(kx-\omega t)}. \quad (7.24)$$

また，次が成り立つ：

$$\delta(x)\delta(t)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}dk\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\,\mathrm{e}^{i(kx-\omega t)}. \quad (7.25)$$

問題 7.5　(7.22) をフーリエ変換を用いて解いて，1 次元拡散方程式のグリーン関数を求めなさい．

解答　(7.24), (7.25) を (7.22) に代入して，フーリエモード k,ω の直交性を用いると，

$$g(k,\omega)=\frac{1}{-i\omega+\kappa k^2}$$

が得られる．この解をまず時間 t に関してフーリエ逆変換する：

$$\begin{aligned}\widehat{G}(k,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(k,\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t}d\omega\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{-i\omega+\kappa k^2}\mathrm{e}^{-i\omega t}d\omega.\end{aligned}$$

ω を複素数に拡張して考える．$t>0$ であるから，半径無限大の半円を下半面に付け加えてもその寄与はない．すると積分路は実軸を $-\infty$ から ∞ まで行って，大きな下半円を回る閉じた積分路になる．その場合は，$\omega=-i\kappa k^2$ の極による寄与しかないから，$\widehat{G}(k,t)=\mathrm{e}^{-\kappa k^2 t}$ となる．次に空間 x に関してのフーリエ逆変換

$$G(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\kappa k^2 t}\mathrm{e}^{ikx}dk$$

を行う．被積分関数の指数部分は

$$-\kappa k^2 t+ikx=-\kappa t\left(k-\frac{ix}{2\kappa t}\right)^2-\frac{x^2}{4\kappa t}$$

と平方完成できるので，

$$G(x,t)=\frac{\mathrm{e}^{-x^2/4\kappa t}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\kappa t(k-ix/2\kappa t)^2}dk$$

と変形できる．$u=k-ix/2\kappa t$ と置けば

$$G(x,t)=\frac{\mathrm{e}^{-x^2/4\kappa t}}{2\pi}\int_{-\infty-ix/2\kappa t}^{\infty-ix/2\kappa t}\mathrm{e}^{-\kappa t u^2}du$$

である．この積分は実軸に沿って行う通常のガウス積分と同じ値 $\sqrt{\pi/(\kappa t)}$ を与える[1]．結局，1 次元拡散方程式のグリーン関数は

$$G(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}}\mathrm{e}^{-x^2/4\kappa t} \quad (7.26)$$

と定まる．■

7.6 量子力学における不確定性原理

量子力学では粒子の位置と運動量は同時には正確に観測できず，その観測誤差 Δx と Δp の間に

$$\Delta x\Delta p\gtrsim\frac{\hbar}{2} \quad (7.27)$$

の関係がある．これを**ハイゼンベルクの不確定性原理**と言う．この性質は「フーリエ変換の心」と通じていることを以下で示そう．

実空間での粒子の状態は**波動関数** $\psi(\boldsymbol{r})$ で表現される．量子力学では，粒子の状態は**ヒルベルト空間**でのベクトル $|\Psi\rangle$ で表される．このベクトルを実空間に射影したのが $\psi(\boldsymbol{r})$ なのである：

$$\psi(\boldsymbol{r})=\langle\boldsymbol{r}|\Psi\rangle. \quad (7.28)$$

$|\Psi\rangle$ は**縦ベクトル**，$\langle\boldsymbol{r}|$ は**横ベクトル**で，$\langle\boldsymbol{r}|\Psi\rangle$ はその内積でありスカラー関数となる*1)．

同様に粒子の運動量空間での波動関数 $\widehat{\psi}(\boldsymbol{p})$ は $|\boldsymbol{p}\rangle$ と $|\Psi\rangle$ の内積で表され

*1)　ディラックは $\langle\,|$ をブラ（bra）ベクトル，$|\,\rangle$ をケット（ket）ベクトルと呼んだ．合わせて $\langle\,\rangle$ で bracket（「括弧」の英語）になるからである．

$$\widehat{\psi}(\boldsymbol{p}) = \langle \boldsymbol{p} | \Psi \rangle. \tag{7.29}$$

である．$\psi(\boldsymbol{r})$ と $\widehat{\psi}(\boldsymbol{p})$ はフーリエ変換とその逆変換で結び付けられている：

$$\widehat{\psi}(\boldsymbol{p}) = \int \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}/\hbar}\psi(\boldsymbol{r})\,d\boldsymbol{r}, \tag{7.30}$$

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \int \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\,\mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}/\hbar}\widehat{\psi}(\boldsymbol{p})\,d\boldsymbol{p}. \tag{7.31}$$

少し別の角度からこの変換式を眺めてみよう．$|\boldsymbol{r}\rangle$ と $|\boldsymbol{r}\rangle$ の積を考えてみる．$\langle \boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}\rangle$ はスカラー量であるのに対して，$|\boldsymbol{r}\rangle\langle \boldsymbol{r}|$ は行列となる．すべての状態について足し上げれば，

$$\int |\boldsymbol{r}\rangle\langle \boldsymbol{r}| d\boldsymbol{r} = 1 \tag{7.32}$$

となる．ただし，右辺は単位行列，つまり対角成分が 1 で非対角成分は零の（無限次元）行列である．これを**完全性**（あるいは**完備性**）と言う．(7.32) を (7.29) の右辺にある $\langle \boldsymbol{p}|$ と $|\Psi\rangle$ の間に挿入して，(7.28) を用いると，

$$\widehat{\psi}(\boldsymbol{p}) = \int \langle \boldsymbol{p}|\boldsymbol{r}\rangle\langle \boldsymbol{r}|\Psi\rangle d\boldsymbol{r} = \int \langle \boldsymbol{p}|\boldsymbol{r}\rangle \psi(\boldsymbol{r})\,d\boldsymbol{r}.$$

これを (7.30) と比べると，$|\boldsymbol{r}\rangle$ と $|\boldsymbol{p}\rangle$ の内積がフーリエ因子であることが分かる：

$$\langle \boldsymbol{p}|\boldsymbol{r}\rangle = \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}/\hbar}.$$

ド・ブローイの公式 $\boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k}$ より，これは波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の平面波であり，同時に運動量 $\boldsymbol{p}$ を持って運動する量子力学的粒子の波動関数である．

問題 7.6　1次元の実空間で波動関数が $\psi(x) = C\mathrm{e}^{ik_0x-ax^2}$ なら，運動量空間での波動関数 $\widehat{\psi}(p)$ はどのような形をしているか．ただし，$C = (2a/\pi)^{1/4}$ である．

解答　(7.30) により

$$\widehat{\psi}(p) = C\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ik_0x-ax^2-ipx/\hbar}dx$$
$$= C\mathrm{e}^{-(k_0-p/\hbar)^2/4a} \times \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a[x-i(k_0-p/\hbar)/2a]^2}dx$$

なので，ガウス積分を実行すると

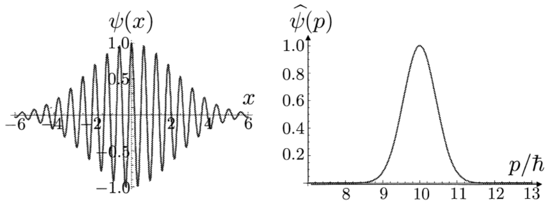


図 7.4　実空間での波動関数 $\psi(x)$ の実部と運動量空間での波動関数 $\widehat{\psi}(p)$.

$$\widehat{\psi}(p) = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^{1/4} \mathrm{e}^{-(p-\hbar k_0)^2/4a\hbar^2}$$

と求められる．■

実空間での波動関数の実部と波数空間での波動関数の振舞いを図 7.4 に示した．パラメターの値は $k_0 = 10,\ a = 0.1$ とした．

問題 7.6 の波動関数に伴う不確定性原理を考えよう．実空間での存在確率は $|\psi(x)|^2$ であるから，$\langle x\rangle = 0,\ \langle (x-\langle x\rangle)^2\rangle = 1/4a$ である．同様に運動量空間での存在確率 $|\widehat{\psi}(p)|^2$ より，$\langle p\rangle = \hbar k_0,\ \langle (p-\langle p\rangle)^2\rangle = a\hbar^2$ となる．したがって $\Delta x\Delta p = \hbar/2$ となり，不確定性 (7.27) の下限を与える．このタイプの波動関数では不確定性が最も小さくなるのである．他方，波動関数 $\psi(x)$ が e^{ik_0x} を有限区間 $-L < x < L$ で打ち切った関数で与えられる場合を考えると，このときには不確定性は無限大になることが示せる．このようにフーリエ変換には不確定性関係が内在している．

参考文献

1)　初貝安弘：『物理学のための応用解析』，新・数理科学ライブラリ 8，サイエンス社 (2003).

（かとり・まこと，中央大学理工学部）
（なかの・とおる，中央大学理工学部）



若き日の出会い

北原　和夫

ここで自分の若い時代を思い出しながら，現在の研究教育活動の原点を探ってみたい．

1．中高時代（1959 年–1965 年）

私は，高校３年の夏くらいまでは，将来の進路を物理学か，数学か，哲学かと考えていた．父が地元の新潟大学の教育学部の物理教育を担当していたこと，兄が数学をやっていたことの影響はあったと思うが，中学校のときの数学の水沢先生の影響が大きかった．増山元三郎の『数に語らせる』という本の輪講を冬休みに自宅を開放して数人の中学生を集めてやってくれた．統計という考え方にこのとき初めて触れて感動し，サイコロを本当に何回も振って確率を確かめようとしたことを覚えている．水沢先生は戦後からずっと新潟大学附属長岡中学校で教鞭をとられ，その教育への熱情と謙虚な人柄で生徒たちに慕われた．私は五人兄弟の下から二番目であるが，兄弟全員水沢先生に数学を習った．というのは，戦後学校が発足してからずっと各学年は一クラスで，私が中学校に入ったとき市の郊外に建設された新校舎への移転を機に始めて二クラスになった．少人数の学校であったので，教師と生徒の結びつきは極めて強かった．水沢先生は教員を定年退職後，『振り向けば青春』という本を出版されて，生徒や同僚との交流をまとめられた．その出版記念の集まりには，多くの教え子が集まった．また，同じキャンパスに，幼稚園，小学校，中学校，そして大学があったので，運動会のハイライトであるリレー競走が，幼稚園の年少組の選手から始まり，学年進行でバトンを受け渡し最後は中学校三年生がアンカーとなる．

高二の冬頃，学校の図書館の司書をやっていた目黒先生（恐らく教育職を退職後嘱託のような形で勤めておられたのだと思う）が，数人の生徒を集めて，放課後に安倍能成の『西洋近世哲学史』を教材にして哲学の自主ゼミをしてくれたことがあった．ヒュームの懐疑論はとても印象的であった．そして，人間の認識のことを考える学問に強い魅力が感じられた．しかし，高三の初めに，原因不明の急性肝炎にかかり１カ月ほど入院することになってしまった．その後，自宅療養が続き，体に自信を失ったことが，理系に向かわせるきっかけになったように思う．今から思うとおかしいことかも知れないが，人間という不可解なものよりも，理屈として確実なことを頼りにして理解を深めていける物理や数学が性にあっているように思えたのである．こうして，高三の後半にやっと受験の方向が理系に定まったのであったが，何とか，現役で大学に入ることができた．当時の高校では，文系理系の区別はほとんどなく，高三の秋

くらいから数学IIIをとるかどうかくらいが，言わば，理系か文系かの選択の分かれ目であって，そのときまでは得意不得意に関わらず誰でも皆同じ科目を履修していたのであった．

2. 学生時代（1965年–1969年）

大学入試の後は，当時数学の研究に入っていた兄の勧めもあって，高木貞治の『解析概論』を読み始めていた．入学のために田舎から東京に出たときに行李に入れてあった本といえば，『解析概論』と聖書だけであった．中学一年生のとき，病気と怪我が続いてほとんど休学に近い状態であったこともあり，しばらく教会に通っていた時期があった．聖書はそのときのものであった．私が大学に入学したのは，1965年で，東京オリンピックの翌年である．ちょうど新幹線も営業が始まり，日本中が高度成長の始まりを予期する時代であった．しかし，まだ1ドル360円に固定されていて，日本は全体としては，貧しい時代であった．雪の深い裏日本の田舎の高校から出てきた私にとって，東京の冬が毎日晴天で明るいことは，別の世界を見るような驚きであった．

大学一年生の頃，クラス主任をされていた化学の西川勝先生の勧めで，ムーアの『Physical Chemistry』を英語で読んだ．当時は洋書は高価で海賊版が古書店などで堂々と売られていた時代であったが，この『Physical Chemistry』については，アジア版という廉価のものが販売されていた．この本の最初の熱力学のところは，諸法則が発見された歴史的経緯も書いてあって，とても興味深いものであった．分子運動論の説明の後には，電気泳動に関するオンサーガーの理論などがあり，後ろのほうにはその頃大きな話題となっていたDNAの話が出ていて面白かった．ムーアの本書はその後も改訂されているが，僕が読んだ初版が一番良いように思う．また，父の勧めもあって久保亮五著の『統計力学』を読んだが，「熱力学的極限」など極めて抽象性が高くて正直言ってよく理解できなかったが，本郷の理学部に進んで著者にお目にかかり，大学四年生のときには，久保先生の「統計現象論」という講義を聴講して感動を覚えた．よく咀嚼できたわけではないが，簡単な統計的仮定をもとにして実験データの意味を明らかにすることのできる現象論の威力を感じさせるものであった．この統計現象論は実は小柴昌俊先生との共同担当であったように記憶している．小柴先生の講義は素粒子物理学における実験のデータ処理に関することであった．

前後するが，駒場ではクラス担任の西川先生の他に，玉木英彦先生と金沢秀夫先生にも大変お世話になった．玉木先生はロシア語で物理の文献を読むというゼミを開講されていた．当時はランダウ・リフシッツの現代物理学教程が評価されていたが，英訳は高価で入手できず，和訳で読むか，ロシア語で読むかしかなかった．私自身は，第二外国語はドイツ語を選択していたので，第三外国語でロシア語とフランス語を履修していた．そこで，玉木ゼミに出て，ランダウ・リフシッツの『力学』を原書で読む機会を得た．玉木ゼミは先生の雑談が面白く，理研時代の話，特に仁科芳雄博士に関する思い出をいろいろと話して下さった．金沢先生はスレーター・フランクの『理論物理学入門』のゼミを開講されていた．一年生にはハードであったが，先生の解説で何とか進むことができた．

三年生の夏休みに，当時の電子技術総合研究所のアルバイトで実験助手をした．一緒に行ったのが細谷暁夫さんで，主に導波管のハンダ付けとか，計測の手伝いをしていた．主任は佐々木亘先生で，毎日の昼食などのときに，いろいろと物理の話をして下さった．今から思い返すと，「近藤効果」に関する実験であったように思う．1カ月の務めの最後に，近くの料亭に招かれて鯉の活き造りを頂いたことを憶えている．実験研究というのは，毎日装置を作ったり，連続して計測したり，しかもアルミフォイルを窓に貼った部屋で外界から隔絶されて継続的に行うものである，ということがよく分かった．予備実験も何回も行った．実験研究は大変だが，時間の経過を忘れさせるものである．当時，電子技術総合研究所は田無にあって，本郷の学生寮（西片にある「同志会」という寮に住ん

でいた）から国電で高田馬場に出て，それから西武線で通った．

四年生のときの卒業研究は，野上燿三先生の研究室で，核分裂核の軌跡を調べることであった．黒田正明さんと一緒で，基本的には野上先生の後についていって実験のまねごとのようなものであった．まず，田無の核物理学研究所に連れていってもらい，そこで，雲母にウランを蒸着させた．先生のすることを見ているだけであった．その試料をもって，東工大の原子炉研に行き，中性子を照射して頂き，それを鉛の容器に入れて本郷まで運び，フッ素気体の中に入れて分裂核によって生じた格子欠陥を破壊して顕微鏡で観察できるほどの穴にする，という作業である．その穴の長さを顕微鏡で計測して，その分布をとり，核分裂が非対称で起こる（つまり大きな核と小さな核に分裂する）ことを確かめた．実験の合間に，修理中のタンデム加速器の中を見せて頂いたりした．この実験をしているときに，格子欠陥に関する文献も輪講したが，野上先生はずっと付き合って下さった．野上先生は教育者として素晴らしい方で，研究室もとても良い雰囲気で，いろいろな方々と接することができた．フランスから帰ってきた竹内富士雄さんもおられ，後にベルギーに留学するときにフランス語の書類作りを手伝って頂いた．今から思うと，非平衡過程に関心を持つようになったのは，野上研究室での経験が大きかった．

3. 大学院修士時代（1969 年–1971 年）

大学院入試は九月にあり，久保先生のところを志望して，受け入れて頂いた．卒業直前に紛争は終結し，1 カ月遅れの卒業となった．久保研究室では，毎週木曜日が集まる日で，まず，昼食会があり，お弁当を食べながら，雑談をする．そして一人あるいは二人が近着の論文について解説し議論をする．久保先生が自分の研究のアイデアを披露してくれることも多かった．その後，少し休憩してから三時から五時くらいまでが「コロキウム」で，一人が自分の研究について報告をする．コロキウムのテーマは数日前にアナウンスされ，他大学の先生方もよく見えていた．コロキウムが終わるとお茶の時間で，お菓子をほおばりながら，議論を続ける，という雰囲気であった．年中行事は，研究室の旅行，久保先生の山荘での夏休み合宿，久保先生のお宅での新年会などであった．

修士課程に入ってしばらくして，秋のコロキウムで，エドワーズの乱流理論を紹介することになった．難解な論文であったが，当時博士課程にいた院生の五十嵐儀孝さんや坂井典佑さんがいろいろと相談に乗ってくれた．この論文は，乱流の場に対する確率を経路積分で扱うもので，私にとって経路積分との最初の出会いであった．

最近引っ越しのために，荷物を整理していたら，当時の久保研究室の「コロキウム控」というノートがでてきた．毎回のコロキウムの内容について，メモが書かれてあった．話をした人でなく，話を聞いた人が書いているところが面白い．また，研究室のコロキウムだけでなく，毎週土曜日に行われていた物性研究所のコロキウムのメモも書かれてある．物性研のコロキウムは，極めて高い専門性をもつもので，当時の錚々たる先生方が出席されていた．我々修士課程の院生は，そこでの議論を聞くことによって，新しい理論が形成されていく過程を目の当たりにすることができたことは極めて貴重な経験であった．久保先生は当時理学部長をされていてお忙しい様子であったが，木曜日午後のコロキウム，土曜日午後の物性研のコロキウムは必ず出席された．最近は様々なプロジェクトの成果報告会が目白押しに開催されていて，それなりに成果を継承しているが，この物性研コロキウムのように，創造のプロセスを継承する機会としての議論の機会は少ないように思われる．

「コロキウム控」の 1968 年 4 月 16 日を見ると，久保先生が「物性物理 20 年の回顧と展望」という話をされている．福山秀敏さんがメモをとっている．手段として中性子散乱，レーザー，メスバウアー効果などが新しく加わったこと，物質としてヘリウム 3 の研究が進んだこと，様々なスペクトロスコピーが発達したこと，超低温，超強磁場などで新しい現象が出ていることなどをレヴュー

されている．翌週は，和田靖先生「ホール係数に関するグリーン関数の方法」と題して，線形応答理論の応用についての話，次の週には研究生として滞在されていた杉崎昌和さんによるガラス転移に関する研究の報告，といった具合で，毎週様々な話題があった．翌1969年になると，報告者が「コロキウム控」を書くようになった．9月11日には，上に述べたエドワーズの論文紹介の私自身のメモが残されてあった．そこに五十嵐さんとエドワーズに対する謝辞も書いてあった．恐らく論文の分からないところについて，直接著者に問い合わせていたようである．

研究室では，コロキウムだけでなく，院生どうしの輪講も盛んであった．多体問題に関する教科書の輪講などを随分やった．分からないところがあると，すぐに上級生に聞くことができた．当時は，多体問題としての物性論が研究室の主流であったが，私自身は，非平衡系のほうに興味があった．久保先生の部屋には新着のプレプリント，別刷りなどが到着番号，日付の付してあるのが山積みになっていて，それを貸し出しノートに記帳すれば，持ち出してよいことになっていた．そこで，当時欧州で，平衡から遠く離れた現象について，研究が進んでいることを知ることができた．

1970年4月16日の「コロキウム控」によると，久保先生が「揺らぎとブラウン運動の現象論」という話をされている．そのメモは私がとっていた．そこで四つの問題を提起されている．1) ブラウン運動の微視的な導出をどうするか，2) 磁気緩和のような吸収線の幅（broadening）を扱うための確率モデルをどう構築するか，3) 量子的自由度に関する揺らぎの現象論をどう構築するか，4) 結合系における情報の縮約をどうするか，といった問題である．その頃久保先生がファン・カンペンの非平衡揺らぎに関する論文をいくつか紹介して下さり，それを平衡から離れた系に拡張することが修士論文のテーマとなった．といっても，久保先生がほぼ定式化しておられて，それを具体的なスピン緩和の系に応用して，数値的に調べることが私の修士論文の内容となった．数値的といっても，当時は簡単な計算でも，計算機センターにカードをもっていってから結果が出てくるまでに三日を要した，という時代である．修士論文のもう一つの内容は，久保先生がコロキウムで話された非線形ブラウン運動の話で，現象論的には非線形項を含むブラウン運動が，平衡状態でマクスウェル分布となるという条件で，確率分布関数に対するフォッカー・プランク方程式を構成し，速度相関関数を連分数展開の方法で厳密に求めた．この数値計算も計算機センターで行ったが，現在なら数秒でできる計算でも，当時は大変時間が掛かった．

4. 欧州留学に到るまで（1971年）

大学院時代は，まだ紛争の余波で落ちつかないキャンパスではあった．同級生が安田講堂攻防戦で逮捕され，同期の院生仲間で当番を決めて，警察（確か小金井あたりだったように記憶している）に差し入れを届けたりしたこともあった．多分物理の本とかお菓子程度であったと思う．

修士論文が書き終わる頃，京都大学基礎物理学研究所で，非平衡系の物理学に関する研究会が開催された．当時の錚々たる先生方が集まり，三日間ほど議論が行われた．松原武生先生がプリゴジン学派のエントロピー生成速度の話をされ，小畠陽之助先生の膜電位の話を紹介された．研究会のあと松原先生の研究室を訪ねて文献を紹介して頂いた．

その頃，ベルギー大使館からベルギー国費留学生の募集の知らせの掲示を目にした．久保先生に留学のことを相談に行ったら，留学するなら二年間くらい腰を落ち着けてやりなさい，と言って，ベルギーに留学したことのある橋爪夏樹先生を紹介して下さった．橋爪先生にはベルギーの事情やプリゴジン学派の雰囲気などをいろいろと教えて頂いた．修士課程の間，駒場の小野周先生の研究室の輪講にも出入りしていた．小野先生は統計力学特論の授業を担当され，エルゴード理論，液体論など言わば統計物理の本流について明晰な説明をされていた．小野先生もプリゴジン学派との関わりのあった方で，留学のための推薦状を書いて

下さった．また，応募申請の書類作成については，野上研の竹内さんに健康診断書の仏訳を助けて頂いた．竹内さんは医学の専門用語まで良く知っておられた．

こうして，準備万端整えて留学生の選考試験に臨んだのであるが，フランス語の書き取りもままならず，また面接ではフランス語での質疑応答がうまくいかず，結局英語に切り替えて頂いて，何とか留学の目的と意思を伝えることができた．結果は採択ということになった．それから，アテネフランスの集中講習に通い，何とかサバイバルのためのフランス語を身につけることにした．

5. ベルギー留学（1971 年–1974 年）

1971 年の 10 月に羽田を発ち，ソ連のアエロフロートに乗って出掛けたが，途中でノボシビルスクに不時着（その理由は伝えられなかった）．数時間の遅れで，パリのオルリー空港に到着．少し前に久保研究室からサクレーに出掛けられた八幡英雄さんと，サクレーですでに研究を続けておられた久保寺さんが空港に迎えにきてくれた．リュクサンブール公園の近くのホテルに泊まり，翌日八幡さんと会って，一日のんびり過ごし，その翌日にパリからブリュッセルに向かったのであるが，たまたまその日の朝から地下鉄のストライキが始まり，やっとの思いでタクシーをつかまえて，北駅まで行き，ブリュッセル行きの列車に乗った．ブリュッセルに到着後，すぐにベルギー政府の文部省に行き，1 カ月分の滞在費を頂いてから，ブリュッセル自由大学のプリゴジン教授の研究室に行って，滞在のためのアレンジをして頂いた．

プリゴジン教授のところでは，2 つのテーマが同時進行していた．一つは不可逆性に関する研究で，これは射影演算子を使う極めて数学的な研究で難しいものであった．もう一つは非平衡系における非線形現象の研究で，若いニコリス教授がリーダーであった．私はニコリス教授のもとで研究をすることになった．基本的には，ファン・カンペンの方法を久保先生と拡張したものを使って，振動反応の模型などに適用できる形にすることで，博士論文にまとめた．一つのブレーク・スルーは，当時カナダから来ていた院生のジョン・バルダラスさんが経路積分に関していろいろと知っていて，ファインマンのラグランジアンから出発する経路積分の背後にあることとして，ハミルトニアンから出発して運動量と座標の両方についての経路積分を行うことが可能であることを教えてくれたことだった．運動量空間の経路積分を先にすると，ファインマンの経路積分が得られるのである．そうすると，ファン・カンペンの方法は，量子力学の WKB 法と対応していることが分かり，結局，確率過程における揺らぎの小さい極限（系のサイズが大きい極限）と，量子力学における半古典近似がうまく対応し，半古典近似における様々な技法（ハミルトン・ヤコビ方程式，正準方程式など）はそのまま使えるとともに，定性的に揺らぎと緩和の関係を捉えることができることを示すことができた．ちなみに，バルダラスさんは相対論的非平衡統計力学の研究のためにきていて，様々な古典力学の手法を知っていた．他にも，拘束力学系に関するディラック括弧の方法，微分幾何学などについても教えて頂いた．これが後に，転位の動力学を考えるときにとても役に立った．このように，異分野，異文化が触れ合う研究室のあり方も重要である．

結局，ベルギー政府の奨学金を延長して頂き，1974 年 6 月にブリュッセル自由大学の博士号を頂いた．その滞在期間に，MIT（マサチューセッツ工科大学）のロス教授が何度かブリュッセルを訪れたことがきっかけとなって，学位取得後 MIT で研究員をすることになった．米国に行く前に 6 月末に帰国し，京大の基礎物理学研究所の研究員となり，京大の富田和久先生の研究室に出入りし，また当時基礎物理学研究所におられた川崎恭治先生ともよく一緒に昼食をとりながら話す機会を得た．

6. MIT 時代（1974 年–1976 年）

米国の研究の一つの中心であった MIT においては，また多くのことを学んだ．一つは欧州と異なる雰囲気である．欧州では，どちらかと言えば，

原理的な方法論のようなところ，あるいは，研究の視点といったところにこだわりがあるように思われるが，MIT では，一つの課題について，様々なアプローチで研究をする，という感じである．その一つの例かもしれないが，私自身 MIT の化学科にいたわけであるが，物理との隔たりは全く感じられなかった．むしろ，物理学が，化学の中に深く入っていることに感動を覚えた．MIT 滞在中は，田中豊一さんと会う機会が多かった．田中さんの所属する物質科学センターは，物理，化学，生物，工学が集まって，物理学の手法によって研究活動が行われていた．残念なことに，田中さんは 2000 年に急逝された．

MIT の理論化学のグループは，3 人の教授からなるが，研究員はみな大部屋に入れられたので，研究室を超えた交流があった．この大部屋は stable（厩）と呼ばれた．金曜日の夕方は，皆でバスケットボールをして夕食を一緒にとることが多かった．研究員の出入りが多く，比較的短期間で，常勤職を得て出ていく研究員が多かった．それだけ MIT はレベルが高いということかも知れない．MIT の人事もすごいものがあった．テニュアトラックの助教授任用にあたっては，同じ分野の研究者を複数雇用して競争させ，一人を残す，ということも行われていた．競争に敗れてテニュアが取れなくても，他大学でテニュアをとるだけの力はあった．

当時一緒に研究したのは，ルーマニアからきたメティウさんである（現在，カリフォルニア大学教授）．相転移の動力学，原子の量子拡散などについて共同研究を行った．彼には，化学反応における非断熱過程についても随分教えて頂いた．これがその後，量子拡散理論を研究する上で役に立った．

7. 東大助手時代以降（1976 年–現在）

MIT の研究員の任期は 2 年であり，その後の見通しは何もなかったのであり，日本の企業の研究所にも応募して一応内定を頂いていたが，結局，東大の古巣の研究室の助手として採用され，1976 年夏に帰国した．ちょうど米国独立 200 年の年であった．

東大助手時代は，米国でやり残した相転移の問題，原子拡散の問題をやっていた．たまたま，日本で 1978 年非平衡統計力学の国際シンポジウムを開催することになり，福岡，京都，東京，仙台，名古屋などに散在していた非平衡物理研究者が，一緒に集まって議論する良い機会となった．もちろん，世界中から研究者を招いたことによって，日本の若手に与えたインパクトも大きかった．

その後静岡大学教養部に五年間在職した．ここでは，人文科学，社会科学を含めたあらゆる分野の教員と日々の付き合いを通して，多いに知的刺激を受けた．

五年間の間に，様々な人々が来てくれて一緒に共同研究をすることができた．日本学術振興会の招聘研究者としてオランダから一年来てくれた研究者，また，特別研究員として滞在してくれた研究者もある．その頃から，原子の量子拡散，転位の微分幾何学などの問題を手がけた．

その後，東工大応用物理学科に移った．ここは，物理化学，確率論，地学，工学なども含み，学際的な雰囲気があった．そこで，15 年ほど過ごしてから，現在の ICU のリベラルアーツ教育の場にいる．

振り返ってみると，少年時代から，いろいろな出会いがあって，その都度関心を拡げていったように思う．一体自分は何を最大関心としてきたのか，と言われると漠としたものであるが，結局，自然の幾何学的記述，揺らぎの数理といったところであろうか．

一方で，最近は，物理オリンピック，科学リテラシー，大学教育の課題など，教育の問題にコミットしている自分もある．これは恐らく，様々な研究教育環境を経験してきたことから，どこか現在の環境に満足しないで理想モデルを求める自分もあるからだろうと思う．

（きたはら・かずお，国際基督教大学教養学部）

特 集(2009年9月号予告)		
	巻頭に	小林 澈郎
	波動方程式の創造	江沢 洋
	コペンハーゲンへの衝撃波	亀淵 迪
	解析学とシュレーディンガー	磯崎 洋
シュレーディンガー	シュレーディンガーの猫	古澤 明
	統計熱力学の定式化	早川 尚男
拡げた波紋の衝撃と足跡を追う	測色の研究	鶴田 匡夫
	『生命とは何か』	金子 邦彦
	どこからどこへ	早川 博信
	[コラム]	細谷 暁夫
本体952円	[コラム]	土佐 幸子

特 集(2009年7月号)		
	対談：現代物理の世界像 素粒子と物性の対話	阿部 龍蔵 米谷 民明
	光から始まったゲージ場 素粒子を語る深遠な言葉	坂井 典佑
	ゲージ場をめぐって 固体の中で	永長 直人
	“繰り込み”という立役者 無限大との付き合い方	青木 慎也
現代物理の世界像	繰り込み群と物性物理学 臨界現象，そして多様な展開へ	菊池 誠 岡部 豊
	双対性という概念	高柳 匡
	対称性の考察 物理における重要性	高橋 實
	理論と実験の関係：現状と課題	岡田 安弘
素粒子と物性の対話	理論におけるモデルの役割と実験	今田 正俊
	《連載》 目で見て学ぶ量子力学 その11	外村 彰
	問題例で深める物理 その6	香取 眞理 中野 徹
本体952円	《数学の道しるべ》 第9回	小野 薫

編集後記

複素数は今でこそ，数学や物理で必須のものですが，発見された当初はあまり認められなかったようです．

ところで，今回の特集に登場する定理や公式を見るとオイラー，ガウス，コーシー，リーマン，リウヴィルなど人名を冠したものが多く見られます．私も最初オイラーの公式を見たときにはとても不思議に思いました．特に $\theta=0$ としたときの等式 $e^{\pi i}+1=0$ について，超越数である自然対数の底 e と円周率 π，さらに虚数単位 i と 1，0 が一つの等式中にすべて登場するのを見たときは，これほど不思議な現象があるとは，と思いました．今ではその不思議なことも数学や物理を語る上では必須のことなのですから，学問の進化とはすごいものです．

このように複素数はたくさんの先人たちによって市民権を得て，歴史とともに進化してきました．これから先，どのような発展を見せるのでしょうか．

さて，今回の特集では虚数単位 i が多くの場面で登場し，その果たしている役割のようなものが感じられたかと思います．次号の特集「シュレーディンガー」でもシュレーディンガー方程式に再度登場します．お楽しみに．(R)

数 理 科 学 8月号

2009年8月1日発行

数理科学編集部 発行人 木 下 敏 孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は sk@saiensu.co.jp まで．

発行所 ⓒ 株式会社 **サイエンス社** TEL. (03) 5474–8500 (代表)
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25 振替 00170–7–2387 (03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本 三美印刷株式会社 山岡景仁